Este livro contém os enunciados integrais das provas de exame nacionais de Matemática A do 12.º ano (1.as Fases, 2.as Fases e Épocas Especiais), elaboradas pelo IAVE – Instituto de Avaliação Educativa, I.P. (antigo GAVE – Gabinete de Avaliação Educacional) e aplicadas nos anos de 2010 a 2015.

Para cada item de construção é apresentada uma proposta de resolução completa e justificada.

Para cada item de seleção são igualmente apresentados um raciocínio e uma explicação completa que conduzem, em cada caso, à escolha da opção correta.

Ao lado de cada item, tanto nos enunciados como nas resoluções, surge uma coluna com indicações relativas à matéria abordada, permitindo ao aluno orientar e direcionar o seu estudo para áreas específicas do programa.

As propostas de resolução contidas neste livro foram elaboradas por uma equipa de professores pertencentes à **Associação de Professores de Matemática (APM)**.

www.eme.pt

N.º catálogo 5500

2010-2015

MATEMÁTICA A

Editorial do Ministério da Educação e Ciência

MATEMÁTICA A

12.º ANO

EXAMES NACIONAIS – 2010-2015

1.as Fases, 2.as Fases e Épocas Especiais

Com resoluções completas e justificadas

MATEMÁTICA A

12.º ANO

EXAMES NACIONAIS – 2010-2015

1.as Fases, 2.as Fases e Épocas Especiais

Com resoluções completas e justificadas

Grupo de Trabalho do Secundário da APM

Edição 2016

A primeira parte deste livro contém enunciados integrais de provas de exame nacionais de Matemática A do 12.º Ano (código 635), elaboradas pelo IAVE – Instituto de Avaliação Educativa, I.P. (anteriormente GAVE – Gabinete de Avaliação Educacional) e realizadas entre os anos de 2010 e 2015.

A segunda parte contém propostas de resolução completas desses enunciados, elaboradas por uma equipa da Associação de Professores de Matemática (APM).

Os enunciados são reproduzidos na sua forma integral e original, sem alterações nem adaptações. Por esta razão, os enunciados dos anos 2010 e 2011 não seguem o atual Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Matemática A (12.º Ano)
Exames Nacionais, código 635 – Anos 2010-2015
1.as Fases, 2.as Fases e Épocas Especiais

Edição: Editorial do Ministério da Educação e Ciência

Propostas de resolução: Associação de Professores de Matemática
Maria Teresa Santos e Paulo Correia (coord.),
Alexandra Justiça, Amélia Mendes, António Cardoso, Arsélio Martins,
Cristina Cruchinho, Filipa Machado, Gabriela Rodrigues, Gonçalo Espadeiro,
Idalina Santos, João Almiro, João Terroso, Joaquim Pinto, Luís Bernardino,
Manuela Simões, Paula Teixeira, Paulo Dionísio, Piedade Ferreira, Rosário Mateiro,
Rui Barbosa

Execução gráfica, comercialização e distribuição:

Editorial do Ministério da Educação e Ciência
Estrada de Mem Martins, 4 – S. Carlos
Apartado 113
2726-901 MEM MARTINS
Tel. 219 266 600 • Fax 219 202 765
Internet: www.eme.pt • E-mail: geral@eme.pt
Facebook: www.facebook.com/EditorialMEC

Capa: Editorial do Ministério da Educação e Ciência

1.ª edição: março de 2016

Tiragem: 6.500 exemplares

ISBN: 978-972-767-017-8

Depósito legal: 405 937/16

ÍNDICE

	Pág.
Prefácio	5
Introdução	7
Enunciados	9
Exames de 2010	11
Exames de 2011	37
Exames de 2012	77
Exames de 2013	99
Exames de 2014	129
Exames de 2015	159
Resoluções	183
Resoluções de 2010	185
Resoluções de 2011	211
Resoluções de 2012	253
Resoluções de 2013	289
Resoluções de 2014	331
Resoluções de 2015	373
Formulário	411
Agrupamento dos itens por tema	412

PREFÁCIO

A Associação de Professores de Matemática, respondendo a um convite da Editorial do Ministério da Educação e Ciência, junta-se a esta iniciativa propondo um conjunto de resoluções de provas de exame e testes intermédios de Matemática A, através da colaboração do seu Grupo de Trabalho do Secundário, que organizou e elaborou a resolução destas provas. A APM pretende também, desta forma, continuar a colaborar e a apoiar a tarefa dos professores, nas suas escolas, e o estudo dos alunos neste aspeto particular das suas aprendizagens.

Sabendo que, no âmbito da avaliação dos alunos deste ciclo de ensino, este tipo de provas tem uma importância que pode ser determinante para o seu futuro, a APM entendeu que o contributo dado a esta publicação poderia constituir uma mais-valia na orientação do estudo e na consolidação das aprendizagens dos jovens que se preparam para finalizar uma etapa do seu percurso escolar.

Assim, houve a preocupação de apresentar propostas de resolução com justificações dos passos dados, muitas vezes com processos alternativos em paralelo, recorrendo ao suporte gráfico e aos recursos tecnológicos, quando previstos. Também nos itens de escolha múltipla é explicada a fundamentação das opções de resposta correta, porque a um bom resultado só se pode chegar, de forma consistente, por processos corretos, ainda que não únicos.

A APM deseja que quantos se dedicam a abrir os caminhos da experiência matemática aos jovens do nosso país sintam que essa é uma tarefa imprescindível para o desenvolvimento pessoal e profissional dos seus alunos, bem como para o progresso do país. Faz votos também para que cada estudante vivencie cada vez mais o seu trabalho de aprendizagem matemática como um desafio a descobrir as imensas possibilidades que este saber proporciona.

Finalmente, a Direção da APM agradece, não só o convite que lhe foi dirigido para esta realização, mas sobretudo o empenho dos seus associados do Grupo de Trabalho do Secundário que, a par da sua atividade letiva, prestaram esta valiosa colaboração.

A presidente da Direção
da Associação de Professores de Matemática

Lurdes Figueiral

INTRODUÇÃO

A Associação de Professores de Matemática (APM) analisa, todos os anos, os exames de Matemática A, não só na sua globalidade mas também cada item individualmente. Desta análise resultam pareceres, que pretendem contribuir para a melhoria da avaliação externa, e propostas de resolução que são divulgadas na página *web* da APM e em vários órgãos de comunicação social.

Este trabalho, complementar e abrangente, é o resultado do envolvimento de um conjunto alargado de professores, de contextos e localizações geográficas diferentes.

A divulgação das resoluções dos itens dos exames tem vindo a constituir-se como um instrumento de trabalho relevante, para professores e alunos, quer em contexto de sala de aula, quer como apoio ao estudo autónomo. Assim, e com os mesmos propósitos, não se pretende com este trabalho sobrevalorizar de forma especial o papel da avaliação externa, enquanto indutora do trabalho preferencial de sala de aula, mas sim tomar consciência que, no final do Ensino Secundário, esta pode revestir-se de importância determinante para muitos alunos.

Deste modo, foi com naturalidade que a APM se associou à Editorial do Ministério da Educação e Ciência numa publicação que resulta da compilação destas resoluções.

Na elaboração deste trabalho conjunto, de entre vários formatos equacionados, optou-se pela organização dos itens respeitando a integridade de cada prova, sem resumos teóricos nem considerações sobre graus de dificuldade ou adequabilidade, pretendendo somente refletir uma opção tendencialmente neutra das resoluções relativamente ao currículo.

Foi igualmente opção manter a fidelidade às resoluções originalmente publicadas, com a consciência da presença de abordagens diferentes de itens semelhantes. Ponderada esta questão, considera-se que a mesma constitui uma vantagem no sentido de não indicar algum processo de resolução preferível em detrimento de outro igualmente correto e válido. Estilos e opções diferentes de resolução de um mesmo item são entendidos como um fator de enriquecimento deste trabalho, bem como um entendimento do ensino da Matemática sustentado na diversidade de abordagens.

No sentido de facilitar a utilização desta publicação em diferentes contextos, os temas do programa da disciplina mobilizados em cada um dos itens e em cada resolução foram identificados e explicitados numa barra lateral criada para esse efeito.

Nas últimas páginas da publicação foi criado um índice remissivo, onde se encontram discriminados os temas e identificadas todas as páginas dos enunciados relacionados com cada tema. Pretende-se assim facilitar a consulta e a seleção de itens relativos a um tema, ou conjuntos de temas, sem comprometer a organização que respeita a integridade de cada prova.

Esta publicação pretende apoiar o trabalho de professores e alunos sem competir com outros materiais com um papel bem definido, como por exemplo os manuais escolares ou as brochuras de apoio ao programa editadas pelo extinto Departamento do Ensino Secundário.

Os autores

Enunciados

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Probabilidades

Probabilidades e axiomática

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

   Sabe-se que:

   - $P(A) = 30\%$;
   - $P(A \cup B) = 70\%$;
   - A e B são incompatíveis.

   Qual é o valor de $P(B)$?

   (A) 21% **(B)** 40% **(C)** 60% **(D)** 61%

Combinatória

2. Num grupo de dez trabalhadores de uma fábrica, vão ser escolhidos três, ao acaso, para frequentarem uma acção de formação. Nesse grupo de dez trabalhadores, há três amigos, o João, o António e o Manuel, que gostariam de frequentar essa acção.

   Qual é a probabilidade de serem escolhidos, exactamente, os três amigos?

   (A) $\frac{1}{{}^{10}A_3}$ **(B)** $\frac{3}{{}^{10}A_3}$ **(C)** $\frac{1}{{}^{10}C_3}$ **(D)** $\frac{3}{{}^{10}C_3}$

Distribuições de probabilidades

3. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	2a	a

   Qual das igualdades seguintes é verdadeira, considerando os valores da tabela?

   (A) $P(X = 0) = P(X > 1)$

   (B) $P(X = 0) = P(X = 2)$

   (C) $P(X = 0) = P(X = 3)$

   (D) $P(X < 2) = P(X = 3)$

Funções

2.ª derivada

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função afim f, de domínio $\mathbb{R}$

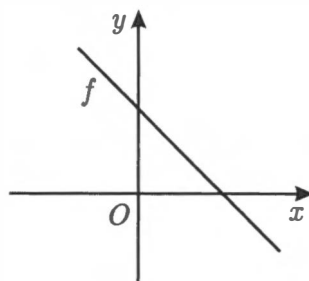
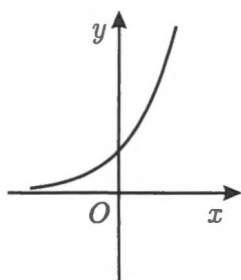
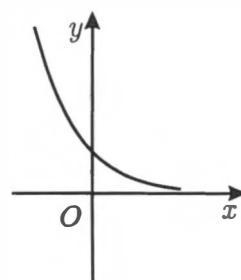
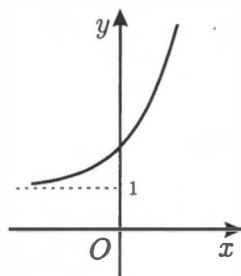
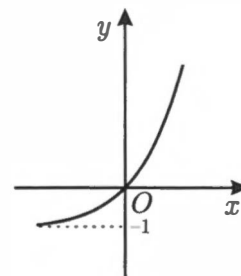



Figura 1

Seja h a função definida por $h(x) = f(x) + e^x$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h'', segunda derivada de h?

(A)

(B)

(C)

(D)

5. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, contínua, de domínio $]-\infty, 1[$

Tal como a Figura 2 sugere, a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de f

Funções

Assíntotas

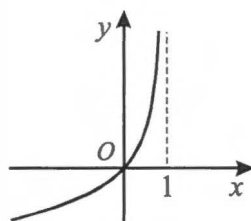



Figura 2

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x}{f(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** 3 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

6. Seja g a função, de domínio $]-2, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x+2)$

Logaritmos

Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[OAB]$ tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\dfrac{5}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\dfrac{5\ \ln 2}{2}$ **(D)** $\dfrac{\ln 2}{2}$

N.os complexos

Operações

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{8} - \theta\right)$, com $\theta \in \mathbb{R}$

Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

(A) $-\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{5\pi}{8}$

Conjuntos e condições

8. Na Figura 3, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição $\text{Re}(z) > 3$

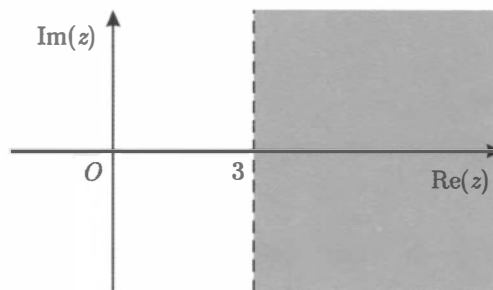



Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?

(A) $\sqrt{3} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(B) $3\sqrt{3} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(C) $\sqrt{3} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(D) $3\sqrt{3} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

N.ᵒˢ complexos

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ e $z_2 = 2 + i$

   Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

   Potências e raízes

   1.1. Determine o número complexo $w = \dfrac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}}$

   (i designa a unidade imaginária, e $\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2)

   Apresente o resultado na forma trigonométrica.

   Demonstrações

   1.2. Mostre que $\left|z_1 + z_2\right|^2 = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$

Probabilidades

2. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:

   - a quinta parte dos alunos tem computador portátil;
   - metade dos alunos não sabe o nome do director;
   - a terça parte dos alunos que não sabe o nome do director tem computador portátil.

   Probabilidade condicionda

   2.1. Determine a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do director.

   Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

   Combinatória

   2.2. Admita que essa escola tem 150 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas.

   Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exactamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

Probabilidades

Probabilidades

3. Considere o problema seguinte:

«Num saco, estão dezoito bolas, de duas cores diferentes, de igual tamanho e textura, indistinguíveis ao tacto. Das dezoito bolas do saco, doze bolas são azuis, e seis bolas são vermelhas.

Se tirarmos duas bolas do saco, simultaneamente, ao acaso, qual é a probabilidade de elas formarem um par da mesma cor?»

Uma resposta correcta para este problema é $\dfrac{12\times 11+6\times 5}{18\times 17}$

Numa composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

Funções

4. Na *Internet*, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em **centenas**, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \quad t \in [0, 5]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Logaritmos

4.1. Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0, 5]$

Logaritmos

4.2. Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.

Apresente o resultado em horas e minutos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Funções

Resolução gráfica

5. Considere uma função f, de domínio $]0, 3[$, cuja derivada f', de domínio $]0, 3[$, é definida por

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

6. Considere a função f, de domínio $]-\infty, 2\pi]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x - \text{sen}(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases} \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Assíntotas

6.1. Prove que a recta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma assimptota oblíqua do gráfico de f

Continuidade

6.2. Determine o valor de b, de modo que f seja contínua em $x = 0$

Funções

7. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

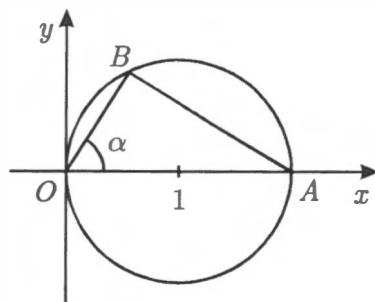



Figura 4

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Funções trigonométricas

7.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

1.ª derivada

7.2. Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos) .... **40 pontos**

GRUPO II

1.
- 1.1. .... 15 pontos
- 1.2. .... 15 pontos

2.
- 2.1. .... 15 pontos
- 2.2. .... 10 pontos

3. .... 15 pontos

4.
- 4.1. .... 10 pontos
- 4.2. .... 15 pontos

5. .... 15 pontos

6.
- 6.1. .... 15 pontos
- 6.2. .... 10 pontos

7.
- 7.1. .... 10 pontos
- 7.2. .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Probabilidades

Probabilidades

1. Uma caixa contém bolas indistinguíveis ao tacto e de duas cores diferentes: azul e roxo.

Sabe-se que:

- o número de bolas azuis é 8
- extraindo-se, ao acaso, uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser azul é igual a $\frac{1}{2}$

Quantas bolas roxas há na caixa?

(A) 16 **(B)** 12 **(C)** 8 **(D)** 4

Combinatória

2. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos $5, 6, 7, 8$ e 9.

De entre estes números, quantos têm, exactamente, três algarismos 5?

(A) ${}^5C_3 \times {}^4A_2$ **(B)** ${}^5C_3 \times 4^2$ **(C)** ${}^5A_3 \times 4^2$ **(D)** ${}^5A_3 \times {}^4C_2$

Triângulo de Pascal

3. Na sequência seguinte, reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal.

$$1 \quad 15 \quad 105 \quad \ldots \quad 105 \quad 15 \quad 1$$

São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{60}$ **(C)** $\frac{1}{120}$ **(D)** 0

Funções

Limites

4. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- h é uma função par;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - 2x) = 0$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$?

(A) $+\infty$ (B) -2 (C) 0 (D) $-\infty$

Limite segundo Heine

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n)$?

(A) $+\infty$ (B) 1 (C) 0 (D) $-\infty$

1.ª derivada

6. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f', primeira derivada de f

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ um ponto do domínio de f, tal que $f'(a) = 0$

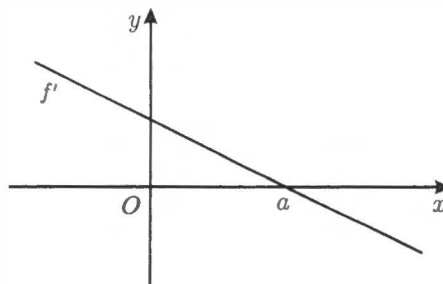



Figura 1

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f tem um mínimo para $x = a$

(B) A função f tem um ponto de inflexão para $x = a$

(C) A função f é crescente em $]0, a[$

(D) A função f é decrescente em $\mathbb{R}$

N.os complexos

Potências e raízes

7. A Figura 2 representa um pentágono $[ABCDE]$ no plano complexo.

Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w

O vértice A tem coordenadas $(1, 0)$

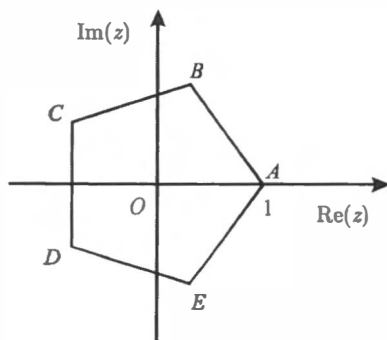



Figura 2

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

(A) $5 \operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ (B) $\operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ (C) $\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ (D) $\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Potências e raízes

8. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na Figura 3.

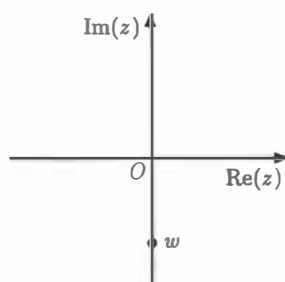



Figura 3

A qual das rectas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissectriz dos quadrantes ímpares

(D) Bissectriz dos quadrantes pares

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

N.os complexos

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Potências e raízes

1.1. Determine o número complexo $w = \frac{z_1^{\ 4} + 4i}{i}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Conjuntos e condições

1.2. Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1

Probabilidades

2. A Figura 4 e a Figura 5 representam, respectivamente, as planificações de dois dados cúbicos equilibrados, A e B.

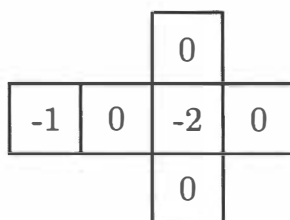



Figura 4

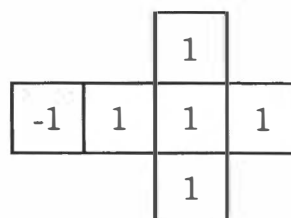



Figura 5

Lançam-se, simultaneamente, os dois dados.

Distribuições de probabilidades

2.1. Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nas faces voltadas para cima, em cada um dos dados».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

Probabilidades

2.2. Considere que o número da face voltada para cima no dado A (Figura 4) é a abcissa de um ponto Q do referencial o.n. xOy, e que o número da face voltada para cima no dado B (Figura 5) é a ordenada desse ponto Q.

Probabilidade condicionada

Considere agora os acontecimentos:

J: «o número saído no dado A é negativo»;

L: «o ponto Q pertence ao terceiro quadrante».

Indique o valor de $P(L \mid J)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Apresente o resultado na forma de fracção.

Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(L \mid J)$ no contexto da situação descrita.

Axiomática

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$

Mostre que $\dfrac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

(P designa probabilidade; $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A; $P(\overline{A} \mid B)$ designa a probabilidade de $\overline{A}$, dado B)

Funções

4. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.**, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Assíntotas

4.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas oblíquas.

1.ª derivada

4.2. Mostre que a função f tem um extremo relativo no intervalo $]2, +\infty[$

Resolução gráfica

4.3. Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

- A, B e C são pontos do gráfico da função f
- A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo $]0, 2]$, da equação $f(x) = f(15)$
- C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f, no intervalo $]0, 2]$, e cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 2]$

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A, B e C, com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Teorema de Bolzano

5.1. Mostre que $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]-2, -1\right[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

1.ª derivada

5.2. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$

6. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.

A Figura 6 e a Figura 7 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas.

Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

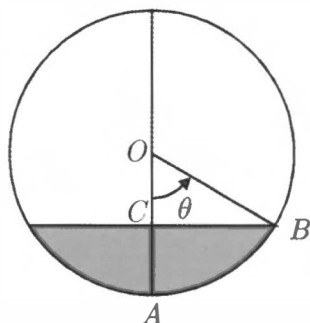



Figura 6

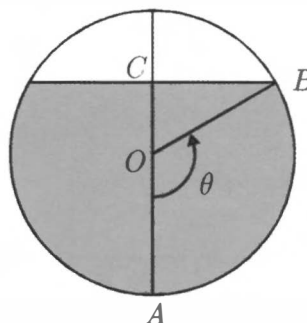



Figura 7

Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por h, de domínio $[0, \pi]$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

Funções trigonométricas

6.2. Resolva a condição $h(\theta) = 3, \quad \theta \in]0, \pi[$

Funções trigonométricas

Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

.... (8 × 5 pontos) .... **40 pontos**

GRUPO II

1.
   - 1.1. .... 15 pontos
   - 1.2. .... 15 pontos

2.
   - 2.1. .... 15 pontos
   - 2.2. .... 15 pontos

3. .... 15 pontos

4.
   - 4.1. .... 10 pontos
   - 4.2. .... 10 pontos
   - 4.3. .... 15 pontos

5.
   - 5.1. .... 15 pontos
   - 5.2. .... 10 pontos

6.
   - 6.1. .... 15 pontos
   - 6.2. .... 10 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. A Rita tem oito livros, todos diferentes, sendo três de Matemática, três de Português e dois de Biologia. A Rita pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros.

Probabilidades

Combinatória

De quantas maneiras diferentes o pode fazer, ficando os livros de Matemática todos juntos numa das pontas?

(A) 72

(B) 240

(C) 720

(D) 1440

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Probabilidades

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\bar{B}) = 0{,}3$
- $P(A \cap B) = 0{,}3$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $0{,}4$

(B) $0{,}6$

(C) $0{,}7$

(D) $0{,}8$

Probabilidades

Distribuições de probabilidades

3. Numa prateleira de uma perfumaria existe um conjunto de dez perfumes diferentes, sendo três de homem e sete de senhora. A gerente pretende escolher, ao acaso, seis desses dez perfumes para colocar na montra.

Seja X a variável aleatória «número de perfumes de homem que se colocam na montra».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X?

(A)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{^{10}C_6}$	$\frac{63}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{35}{^{10}C_6}$

(B)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{70}{^{10}C_6}$

(C)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{70}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{35}{^{10}C_6}$

(D)

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{35}{^{10}C_6}$	$\frac{105}{^{10}C_6}$	$\frac{63}{^{10}C_6}$	$\frac{7}{^{10}C_6}$

Funções

Logaritmos

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x) = \ln(-3x)$

Qual é a solução da equação $f(x) = 2$?

(A) $\frac{1}{2}e^3$ **(B)** $-\frac{1}{2}e^3$ **(C)** $-\frac{1}{3}e^2$ **(D)** $\frac{1}{3}e^2$

Limites

5. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a recta de equação $y = -4$, assimptota do gráfico de h

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** -4 **(D)** 0

6. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função derivada, f', de uma função f

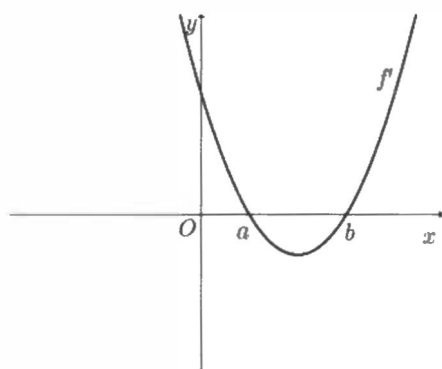
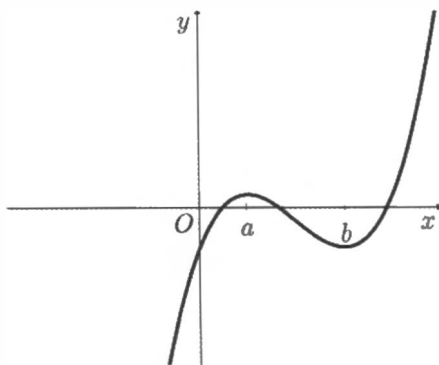
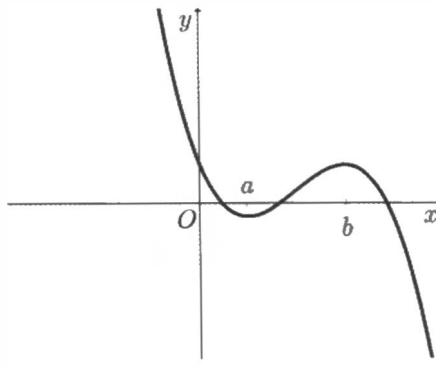
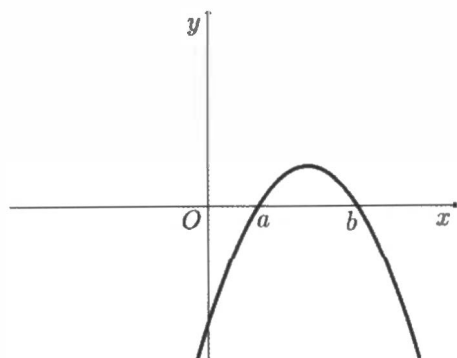
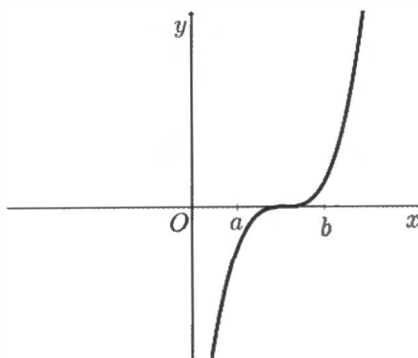



Figura 1

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

(A)

(B)

(C)

(D)

N.os complexos

Conjuntos e condições

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \overline{z}) = 0\}$

(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z}$ designa o conjugado de z)

Qual das rectas seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto A?

(A) o eixo real

(B) o eixo imaginário

(C) a bissectriz dos quadrantes pares

(D) a bissectriz dos quadrantes ímpares

Operações

8. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, os pontos P, Q, R, S e T.

O ponto P é a imagem geométrica de um número complexo z

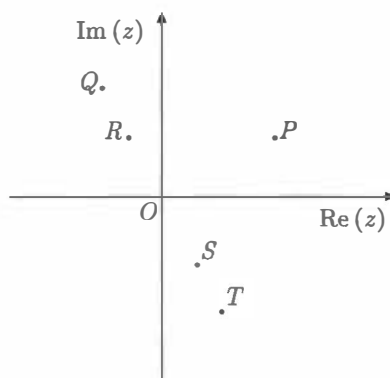



Figura 2

Qual dos pontos seguintes, representados na Figura 2, é a imagem geométrica do número complexo $-i \times z$?

(A) Q

(B) R

(C) S

(D) T

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo

N.ºs complexos

$$z = \frac{(-1-i)^8}{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \times \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Verifique que $z = 16\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Potências e raizes

1.2. Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z

Potências e raizes

2. Uma turma é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são rapazes. A Maria e o Manuel são alunos dessa turma. A professora de Português vai escolher, ao acaso, um grupo de cinco alunos para definirem as regras de um Jogo de Palavras.

Probabilidades

2.1. Determine quantos grupos diferentes se podem formar, sabendo que em cada grupo tem de estar, pelo menos, um aluno de cada sexo.

Combinatória

Probabilidades

Probabilidade condicionada

2.2. Considere os acontecimentos:

A: «a Maria e o Manuel são escolhidos para definirem as regras do jogo»;

B: «dos cinco alunos escolhidos, dois são rapazes e três são raparigas».

Uma resposta correcta para a probabilidade condicionada $P(B\,|\,A)$ é $\dfrac{16 \times {}^{9}C_{2}}{{}^{25}C_{3}}$

Numa composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- a interpretação do significado de $P(B\,|\,A)$, no contexto da situação descrita;
- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

Probabilidade condicionada

3. A Ana e a Joana são amigas e vão acampar nas férias do Carnaval. A mãe da Ana e a mãe da Joana pediram às filhas que, quando chegassem ao acampamento, lhes telefonassem, pedido que é hábito fazerem sempre que as jovens se ausentam de casa por períodos de tempo alargados. Admita-se que o facto de uma delas telefonar é independente de a outra também o fazer.

Sabe-se pela experiência que elas nem sempre satisfazem o pedido das mães.

Considere os acontecimentos:

A: «a Ana telefona à mãe»;

B: «a Joana telefona à mãe».

Determine a probabilidade de, pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, sabendo que $P(A) = 70\%$, que $P(B) = 80\%$ e que A e B são acontecimentos independentes.

Apresente o resultado em percentagem.

4. Considere a função f, de domínio $\left]0, \pi\right[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$

Funções

Resolução gráfica

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox, que se situa mais próximo da origem O;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a recta bissectriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B;
- desenhar o triângulo $[OAB]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

5. Seja uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, e seja a recta de equação $y = 1$ a única assimptota do gráfico de f

Assíntotas

Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) + x$

Prove que o gráfico de g tem uma assimptota oblíqua paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Funções

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Estude a continuidade da função h em $x = 0$

Continuidade

6.2. Resolva, no intervalo $\left]-\infty, 0\right]$, a inequação $h(x) > h(-4)$

Exponenciais e logaritmos

Funções

7. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in [0, 24]$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Funções trigonométricas

7.1. Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

1.ª derivada

7.2. Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

.... (8 × 5 pontos) .... **40 pontos**

GRUPO II

1.
- 1.1. .... 15 pontos
- 1.2. .... 15 pontos

2.
- 2.1. .... 15 pontos
- 2.2. .... 15 pontos

3. .... 15 pontos

4. .... 15 pontos

5. .... 15 pontos

6.
- 6.1. .... 15 pontos
- 6.2. .... 15 pontos

7.
- 7.1. .... 10 pontos
- 7.2. .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Probabilidades

Axiomática e probabilidade condicionada

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$ independentes, com $P(A) \neq 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $P(A) + P(B) = 1$

(B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(C) $P(A) \neq P(B)$

(D) $P(B \mid A) = P(B)$

Combinatória

2. O código de um auto-rádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137

Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7 ?

(A) 486

(B) 810

(C) 432

(D) 600

Funções

Assíntotas

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função g, de domínio $]-3, +\infty[$

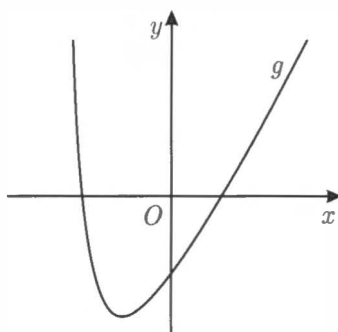



Figura 1

A recta de equação $y = 2x - 4$ é assimptota do gráfico de g

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2x - 4\right) = 0$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{g(x)} = 2$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2x + 4\right) = 0$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2x\right) = 0$

Teorema de Bolzano

4. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \dfrac{1 - e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f?

(A) $]0, 1[$ **(B)** $]1, 4[$ **(C)** $]4, 6[$ **(D)** $]6, 7[$

Limites

5. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\,\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$?

(A) 4

(B) 0

(C) $\dfrac{1}{4}$

(D) $\dfrac{1}{2}$

6. Na Figura 2, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$

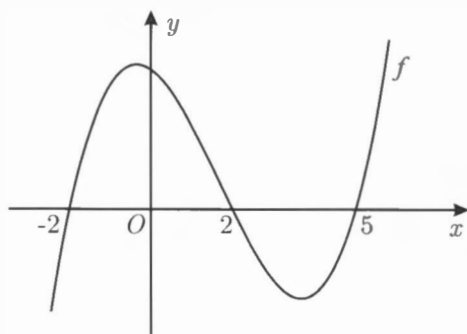



Figura 2

Sabe-se que:

- -2, 2 e 5 são zeros de f
- f' representa a função derivada de f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f'(0)\times f'(6)=0$

(B) $f'(-3)\times f'(6)<0$

(C) $f'(-3)\times f'(0)>0$

(D) $f'(0)\times f'(6)<0$

7. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

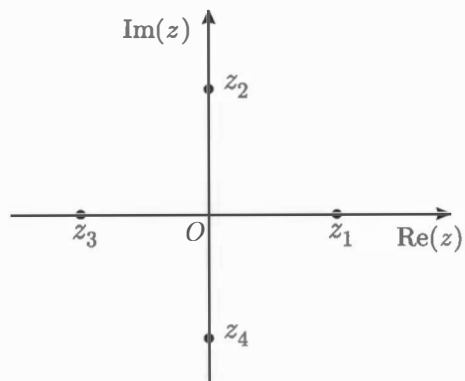



Figura 3

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?

(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

8. Na Figura 4, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular.

Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1.º quadrante;
- o ponto B está situado no 4.º quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$

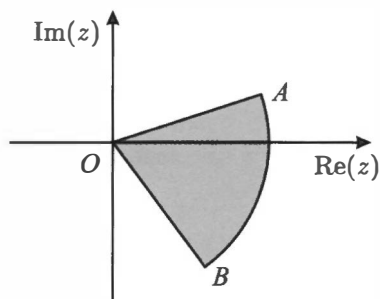



Figura 4

Qual dos números seguintes é o valor da área do sector circular AOB ?

(A) $\frac{\pi}{5}$

(B) $\frac{4\pi}{5}$

(C) $\frac{2\pi}{5}$

(D) $\frac{8\pi}{5}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

N.os complexos

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1\,,\ \ z_2 = 5i \quad \text{e} \quad z_3 = \text{cis}\left(\frac{n\,\pi}{40}\right),\ \ n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

Equações

1.1. O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$

Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.

Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

Operações

1.2. Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Probabilidades

2. Uma companhia aérea vende bilhetes a baixo custo exclusivamente para viagens cujos destinos sejam Berlim ou Paris.

Distribuição binomial

2.1. Nove jovens decidem ir a Berlim e escolhem essa companhia aérea. Cada jovem paga o bilhete com cartão multibanco, ou não, independentemente da forma de pagamento utilizada pelos outros jovens. Considere que a probabilidade de um jovem utilizar cartão multibanco, para pagar o seu bilhete, é igual a $0{,}6$.

Determine a probabilidade de exactamente 6 desses jovens utilizarem cartão multibanco para pagarem o seu bilhete.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Probabilidade condicionada

2.2. A companhia aérea constatou que, quando o destino é Berlim, 5% dos seus passageiros perdem o voo e que, quando o destino é Paris, 92% dos passageiros seguem viagem. Sabe-se que 30% dos bilhetes a baixo custo que a companhia aérea vende têm por destino Berlim.

Determine a probabilidade de um passageiro, que comprou um bilhete a baixo custo nessa companhia aérea, perder o voo.

Apresente o resultado na forma de dízima.

Probabilidades

Axiomática

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$

Mostre que $P(B \mid A) \geq 1 - \dfrac{1 - P(B)}{P(A)}$

Funções

1.ª derivada

4. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0{,}1\,t^2 e^{-0{,}15t}, \quad \text{com} \quad t \in [0, 20]$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

1.ª derivada e assíntotas

5.1. O gráfico de f admite uma assimptota horizontal.

Seja P o ponto de intersecção dessa assimptota com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.

Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução gráfica

5.2. Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas.

Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

6. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4\cos(2x)$

Sabe-se que:

- os vértices A e D do trapézio $[ABCD]$ pertencem ao eixo Ox
- o vértice B do trapézio $[ABCD]$ pertence ao eixo Oy
- o vértice D do trapézio $[ABCD]$ tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de f
- a recta CD é paralela ao eixo Oy

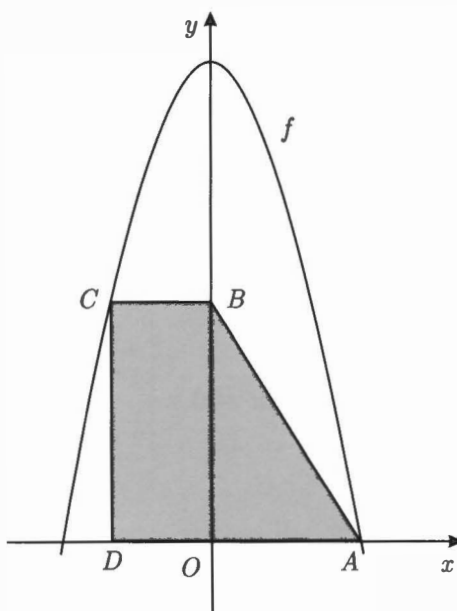



Figura 5

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Funcões trigonométricas

6.1. Determine o valor exacto da área do trapézio $[ABCD]$

Funcões trigonométricas e derivadas

6.2. Seja f' a primeira derivada da função f, e seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f(x)+f'(x)+f''(x) = -4\big(3\cos(2x)+2\operatorname{sen}(2x)\big)$, para qualquer número real x

7. Na Figura 6, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função g

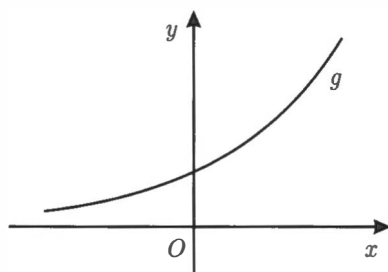



Figura 6

Sabe-se que:

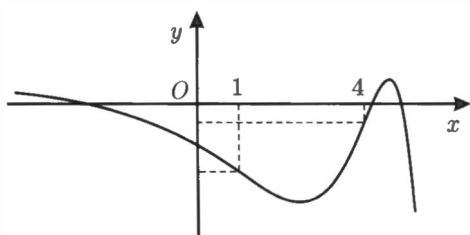
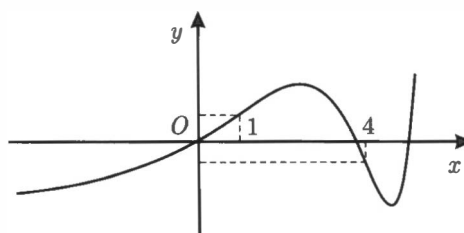
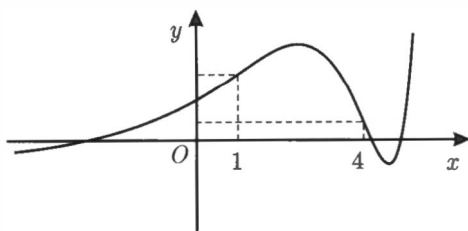
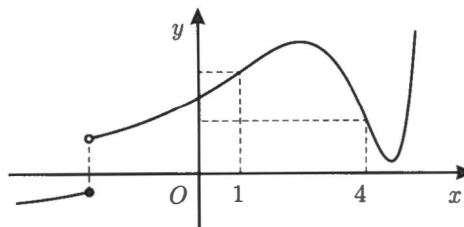
- g é uma função contínua em $\mathbb{R}$
- g não tem zeros
- a segunda derivada, f'', de uma certa função f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$
- $f(1) \times f(4) > 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f

I

II

III

IV

Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar f
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

..........(8 × 5 pontos)..........	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	20 pontos
5.2.	15 pontos
6.	
6.1.	15 pontos
6.2.	10 pontos
7.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Probabilidades

Combinatória

1. Os medicamentos produzidos num laboratório são embalados em caixas de igual aspecto exterior e indistinguíveis ao tacto. Um lote contém dez caixas de um medicamento X e vinte caixas de um medicamento Y. Desse lote, retiram-se, ao acaso, simultaneamente, quatro caixas para controlo de qualidade.

Qual é a probabilidade de as caixas retiradas serem todas do medicamento Y?

(A) $\frac{^{10}C_4}{^{30}C_4}$ **(B)** $\frac{^{20}C_4}{^{30}C_4}$ **(C)** $\frac{4}{^{30}C_4}$ **(D)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

Distribuições de probabilidades

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$2a$	a	b	b	b	$\frac{1}{10}$

Sabe-se que:

- a e b são números reais
- $P(X \leq 1) = 3P(X = 5)$

Qual é o valor de b?

(A) $\frac{1}{10}$ **(B)** $\frac{4}{15}$ **(C)** $\frac{7}{30}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

Distribuição normal

3. Seja a um número real positivo e seja X uma variável aleatória com distribuição Normal $N(0, 1)$

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 0$

(B) $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$

(C) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 1$

(D) $P(X \leq a) = P(X > a)$

Funções

2.ª derivada

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 4.

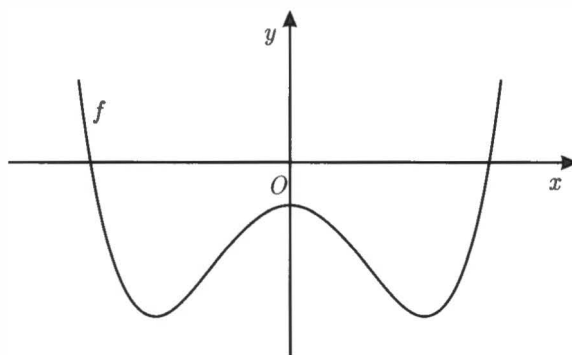



Figura 1

Qual das expressões seguintes pode definir a função f'', segunda derivada de f?

(A) $(x - 3)^2$

(B) $(x + 3)^2$

(C) $9 - x^2$

(D) $x^2 - 9$

Continuidade

5. Para um certo número real positivo, k, a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} & \text{se} \quad x>0\\ \ln(k-x) & \text{se} \quad x\leq 0\end{cases}$$ é contínua.

Qual é o valor de k?

(A) $\sqrt[3]{e}$ **(B)** e^3 **(C)** $\dfrac{e}{3}$ **(D)** $3e$

Funcões trigonométricas

6. Na Figura 2, está representado, num referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico.

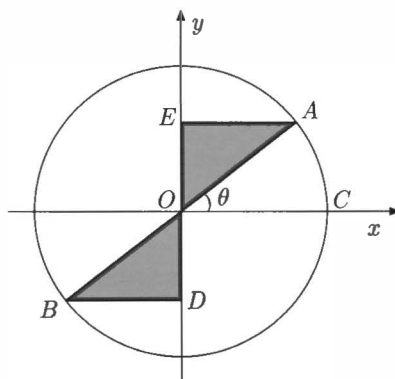



Figura 2

Sabe-se que:

- C é o ponto de coordenadas $(1,\, 0)$
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy
- $[AB]$ é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as rectas EA e BD são paralelas ao eixo Ox
- θ é a amplitude do ângulo COA
- $\theta \in \left]0,\, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da região sombreada na Figura 2?

(A) $2\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

(B) $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

(C) $2\,(1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

(D) $1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

7. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, a sombreado, um sector circular.

Sabe-se que:

- o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $-\sqrt{3}+i$
- o ponto B tem abcissa negativa, ordenada nula, e pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\overline{OA}$

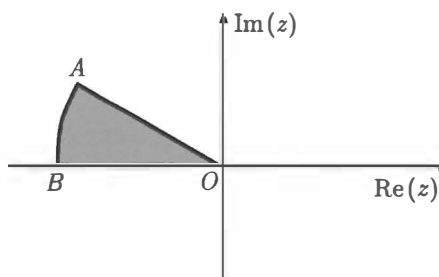



Figura 3

Qual das condições seguintes define, em $\mathbb{C}$, a região a sombreado, incluindo a fronteira?

(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$)

(A) $|z| \leq 2 \ \wedge \ \dfrac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$

(B) $|z| \leq 2 \ \wedge \ \dfrac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

(C) $|z| \leq 4 \ \wedge \ \dfrac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \pi$

(D) $|z| \leq 4 \ \wedge \ \dfrac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$

8. Na Figura 4, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6

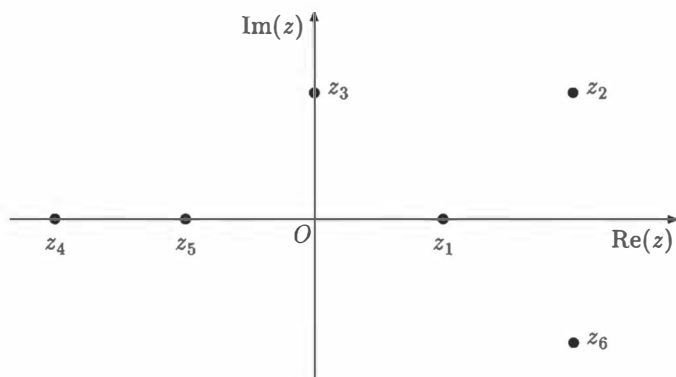



Figura 4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $(z_2 + z_4) \times i$?

(A) z_1

(B) z_3

(C) z_5

(D) z_6

N.os complexos

Operações

Demonstrações

Probabilidades

Probabilidade condicionada

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

1.1. Considere $z_1 = 1 + 2i$ e $w = \dfrac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)}$, com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

Determine o valor de b para o qual w é um número real.

1.2. Seja z um número complexo tal que $|z| = 1$

Mostre que $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$

2. A MatFinance é uma empresa de consultoria financeira.

2.1. Dos funcionários da MatFinance, sabe-se que:

- 60% são licenciados;
- dos que são licenciados, 80% têm idade inferior a 40 anos;
- dos que não são licenciados, 10% têm idade inferior a 40 anos.

Determine a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao acaso, ser licenciado, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Combinatória

2.2. Considere o problema seguinte.

«Foi pedido a 15 funcionários da MatFinance que se pronunciassem sobre um novo horário de trabalho.

Desses 15 funcionários, 9 estão a favor do novo horário, 4 estão contra, e os restantes estão indecisos. Escolhe-se, ao acaso, 3 funcionários de entre os 15 funcionários considerados.

De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas.

Resposta I: ${}^{15}C_3 - {}^{6}C_3$ Resposta II: $6 \times {}^{9}C_2 + {}^{9}C_3$

Apenas uma das respostas está correcta.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a resposta correcta;
- explique um raciocínio que conduza à resposta correcta;
- proponha uma alteração na expressão correspondente à resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração proposta.

Funções

3. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B. Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica e Victoria cruziana*.

$N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_A(t) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2t}} \quad \text{com } t \geq 0$$

$N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_B(t) = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0,4t}} \quad \text{com } t \geq 0$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exponenciais e logaritmos

3.1. Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou.

Determine de quanto foi esse aumento.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Exponenciais e logaritmos

3.2. Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Funções

Resolução gráfica

4. Considere a função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = e^{2x} + \cos x - 2x^2$

Sabe-se que:

- B é um ponto do gráfico de f
- a recta de equação $y = 8x$ é paralela à recta tangente ao gráfico de f no ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto B

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

5. Considere a função f, de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2-x} - 1}{x - 2} & \text{se} \quad 0 \leq x < 2 \\ \\ \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Assintotas

5.1. Estude f quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

Teorema de Bolzano

5.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

1.ª derivada

5.3. Estude f quanto à monotonia em $]2, +\infty[$

Funções trignométricas e 2.ª derivada

6. Para a, b e n, números reais positivos, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a\cos(nx) + b\,\text{sen}(nx)$

Seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real x

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

..........(8 × 5 pontos)..........	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	20 pontos
2.2.	15 pontos
3.	
3.1.	10 pontos
3.2.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	10 pontos
5.3.	15 pontos
6.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL	**200 pontos**

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Probabilidades

Probabilidade condicionada

1. Num determinado clube desportivo praticam-se apenas dois desportos, futebol e andebol. Dos jovens inscritos nesse clube, 28 jogam apenas futebol, 12 jogam apenas andebol e 12 jogam futebol e andebol. Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens inscritos.

Qual é a probabilidade de o jovem escolhido jogar andebol sabendo que joga futebol?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{3}{10}$ **(C)** $\frac{7}{10}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

Distribuição binomial

2. Lança-se cinco vezes consecutivas um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista-se, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para cima.

Considere os acontecimentos seguintes.

I: «sair face ímpar em exactamente dois dos cinco lançamentos»;

J: «sair face 4 em exactamente dois dos cinco lançamentos».

Qual dos acontecimentos seguintes é mais provável?

(A) acontecimento I

(B) acontecimento $\overline{I}$

(C) acontecimento J

(D) acontecimento $\overline{J}$

Axiomática

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) incompatíveis.

Sabe-se que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$ e que $P(A) = 0{,}5$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** 0 **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}4$

Funções

Assíntotas

4. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+2x\right)=0$

Em qual das opções seguintes as equações definem duas assimptotas do gráfico de f?

(A) $x=-2$ e $y=1$

(B) $x=3$ e $y=-2x$

(C) $y=-2x$ e $y=1$

(D) $y=2x$ e $y=-1$

2.ª derivada

5. Para um certo número real a, seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ax^2-1$

Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f

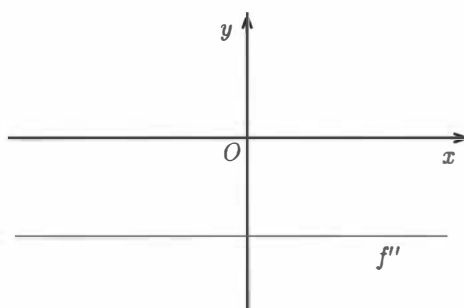



Figura 1

Qual dos valores seguintes pode ser o valor de a?

(A) 0

(B) π

(C) 3

(D) -3

Funções trigonométricas

6. Na Figura 2, estão representados, num referencial o. n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1
- A é o ponto de coordenadas $(-1,\, 0)$
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

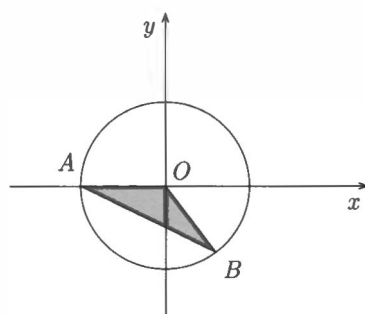



Figura 2

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\sqrt{3}$

N.os complexos

Equações

7. Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (3k+2) + p\,i$ e $z_2 = (3p-4) + (2-5k)i$ dois números complexos.

Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2?

(A) $k = -1$ e $p = 3$

(B) $k = 1$ e $p = 3$

(C) $k = 0$ e $p = -2$

(D) $k = 1$ e $p = -3$

Potências e raízes

8. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w

No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na Figura 3.

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo.

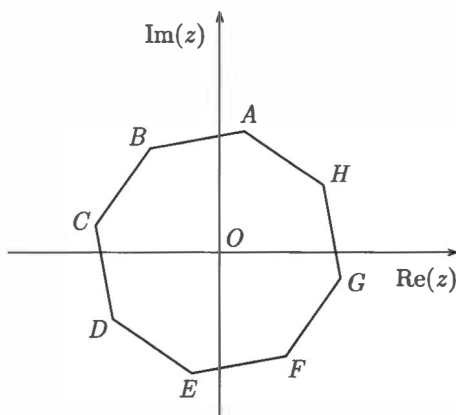



Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono $[ABCDEFGH]$?

(A) $-w$

(B) $w + 1$

(C) $i \times w$

(D) $i^3 \times w$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

N.os complexos

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

Potências e raízes

1.1. Considere $z_1 = 2+\sqrt{3}\,i + i^{4n+2014}$, $n \in \mathbb{N}$

Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z

Determine z

Apresente o resultado na forma algébrica.

Conjuntos e condições

1.2. Considere $z_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

No plano complexo, a região definida pela condição $|z - z_2| \leq 1 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi \wedge |z| \geq |z - z_2|$ está representada geometricamente numa das opções I, II, III e IV, apresentadas na página seguinte.

(Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $]0, 2\pi]$)

Sabe-se que, em cada uma das opções:

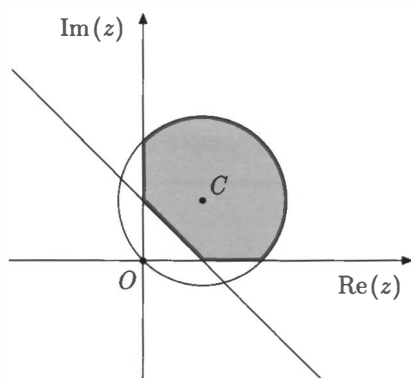
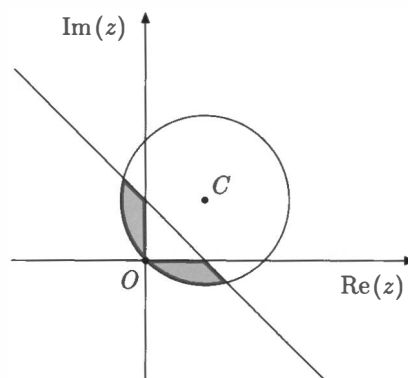
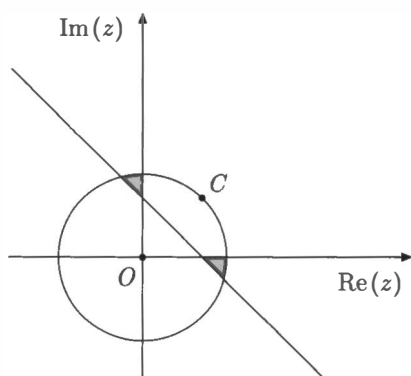
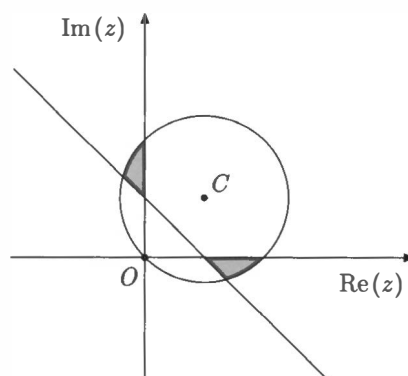
- O é a origem do referencial;
- C é a imagem geométrica de z_2
- $\overline{OC}$ é o raio da circunferência.

Apenas uma das opções está correcta.

I

II

III

IV

Elabore uma composição na qual:

- indique a opção correcta;
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

Probabilidades

Axiomática

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, com $P(B) \neq 0$

Mostre que $P\left(\overline{A \cap B} \mid B\right) = P\left(\overline{A} \mid B\right)$

3. Considere as 13 cartas do naipe de copas: ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do 2 ao 10).

Probabilidades

3.1. As cartas vão ser dispostas, ao acaso, sobre uma mesa, lado a lado, de modo a formarem uma sequência de 13 cartas.

Combinatória

Determine o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas.

3.2. Determine a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos duas figuras.

Combinatória

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Para um certo valor real de k, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

Funções

Logaritmos

$$Q(t) = 12 + \log_3(81 - k\,t^2), \quad \text{com} \quad t \in [0, 20]$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.

Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases} \qquad (a \text{ é um número real.})$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Determine a sabendo que f é contínua em $x = -1$

Continuidade

5.2. Seja f' a primeira derivada de f

1.ª derivada e Teorema de Bolzano

Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0, 1[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Funções

6. De duas funções f e g sabe-se que:

- f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f(x) = \pi - 4\text{sen}(5x)$
- g tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e g', primeira derivada de g, tem domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$ e é definida por

$$g'(x) = \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Resolva os itens **6.1.** e **6.2.** recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Limites

6.1. Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{f(x) - \pi}$

2.ª derivada

6.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$

Resolva o item **6.3.** recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Resolução gráfica

6.3. Seja h a função, de domínio $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$

O ponto A pertence ao gráfico da função h

Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função h no ponto A é paralela ao eixo Ox

Determine a abcissa do ponto A.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto com arredondamento às décimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	15 pontos
3.	
3.1.	10 pontos
3.2.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
6.	
6.1.	15 pontos
6.2.	15 pontos
6.3.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Resoluções pág. 239

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Probabilidades

Axiomática

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(\overline{A}) = 0{,}9$
- $P(A \cup B) = 0{,}73$
- A e B são acontecimentos independentes

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}63$ **(B)** $0{,}657$ **(C)** $0{,}073$ **(D)** $0{,}7$

Probabilidade condicionada

2. Uma turma do 12.º ano de uma escola secundária tem 18 raparigas e 10 rapazes. Nessa turma, 20 alunos têm Inglês. Dos alunos da turma que têm Inglês só 4 são rapazes.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Qual é a probabilidade de o aluno escolhido não ter Inglês, sabendo que é rapariga?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{2}{9}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

Triângulo de Pascal

3. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é $61\,075$

A soma dos três primeiros elementos dessa linha é $61\,426$

Qual é a soma dos três últimos elementos da linha seguinte?

(A) $61\,425$ **(B)** $61\,426$ **(C)** $61\,777$ **(D)** 122501

Funções

Limite segundo Heine

4. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{4}{x} + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$

Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2 - \frac{1}{n}$

(B) $2 + \frac{1}{n}$

(C) $3 - \frac{1}{n}$

(D) $3 + \frac{1}{n}$

1.ª derivada

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de uma função h', primeira derivada de h

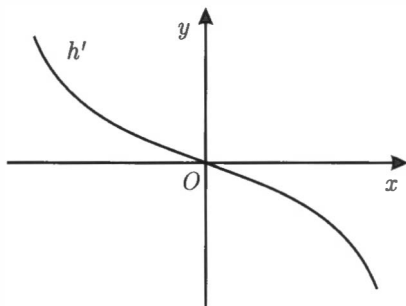
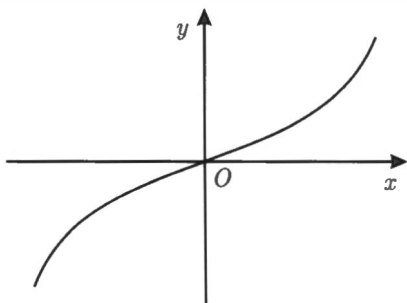
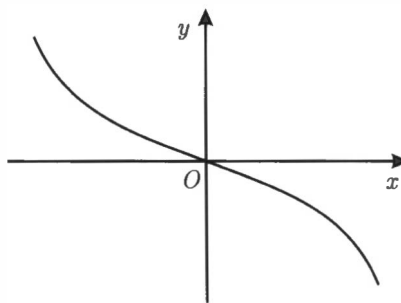
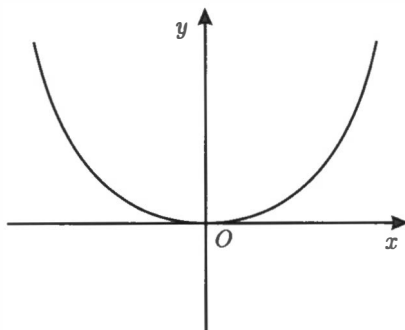
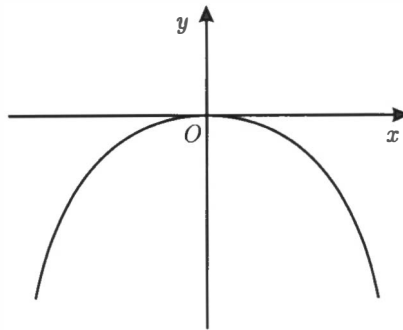



Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h?

(A)

(B)

(C)

(D)

1.ª derivada

6. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x-1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 ?

(A) $y = 3x - 2$

(B) $y = 3x + 4$

(C) $y = 2x - 1$

(D) $y = -3x + 2$

N.ºs complexos

Potências e raízes

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de z ?

(A) $\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{25\pi}{36}\right)$

(B) $\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{36}\right)$

(C) $2\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{25\pi}{36}\right)$

(D) $2\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{36}\right)$

8. Na Figura 2, estão representados, no plano complexo, seis pontos, M, N, P, Q, R e S

Sabe-se que:

- o ponto M é a imagem geométrica do número complexo $z_1 = 2 + i$
- o ponto N é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$

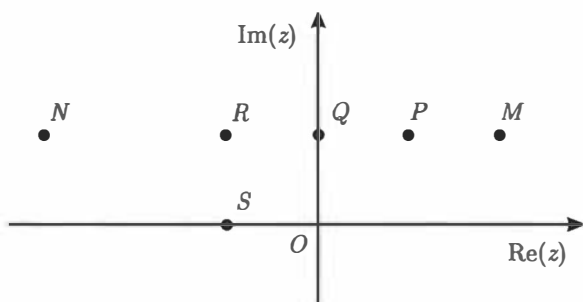



Figura 2

Qual dos pontos seguintes pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2 ?

(A) ponto P

(B) ponto Q

(C) ponto R

(D) ponto S

N.os complexos

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

Equações

1.1. Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2+z+1=0$

Determine $\frac{1}{w}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Demonstrações

1.2. Seja z um número complexo.

Mostre que $(\bar{z}+i)\times(z-i)=|z-i|^2$, para qualquer número complexo z

($\bar{z}$ designa o conjugado de z)

Probabilidades

2. Na Figura 3, está representado um tetraedro com as faces numeradas de 1 a 4

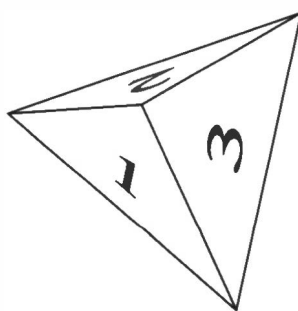



Figura 3

Combinatória

2.1. O João tem um catálogo de tintas com 12 cores diferentes, uma das quais é a sua preferida.

O João selecciona, ao acaso, 4 cores diferentes para pintar as quatro faces do tetraedro.

Cada uma das faces é pintada com uma única cor.

Determine a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar 3 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Distribuição de probabilidades e distribuição binomial

Seja X a variável aleatória *«número de vezes que, nesses três lançamentos do tetraedro, se regista o número 1»*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

2.3. Considere, agora, a experiência aleatória que consiste em lançar 4 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Probabilidade condicionada

Sejam I e J os acontecimentos seguintes.

I: *«o número registado nos três primeiros lançamentos do tetraedro é o número 2»;*

J: *«a soma dos números registados nos quatro lançamentos do tetraedro é menor do que 10».*

Indique o valor de $P(J\,|\,I)$ sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(J\,|\,I)$ no contexto da situação descrita.

3. O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E, que é a que os sismógrafos registam.

Funções

A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5}$

A magnitude, M, de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

3.1. Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1

Logaritmos

Determine o momento sísmico, M_0, para esse sismo.

Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10

3.2. Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos.

Logaritmos

Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

Funções

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} k+\dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x<1 \\ -x+\ln x & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$ (k designa um número real)

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Continuidade

4.1. Determine k, sabendo que f é contínua em $x=1$

Assíntotas

4.2. Considere, agora, $k=3$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas horizontais do gráfico de f

Funções trigonométricas e 2.ª derivada

5. Na Figura 4, está representado, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função g, de domínio $\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $g(x)=x-2\cos x$

Sabe-se que C e D são pontos do gráfico de g cujas ordenadas são extremos relativos de g

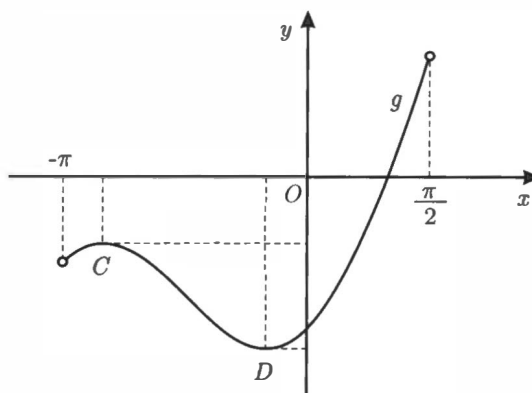



Figura 4

Determine os valores exactos das coordenadas dos pontos C e D recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução gráfica

6. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $]-\infty, 6[$, definida por $f(x) = 2 + 15\ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$

Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f, e que C tem coordenadas positivas.

Para cada posição do ponto C, considere o rectângulo $[OACB]$, em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

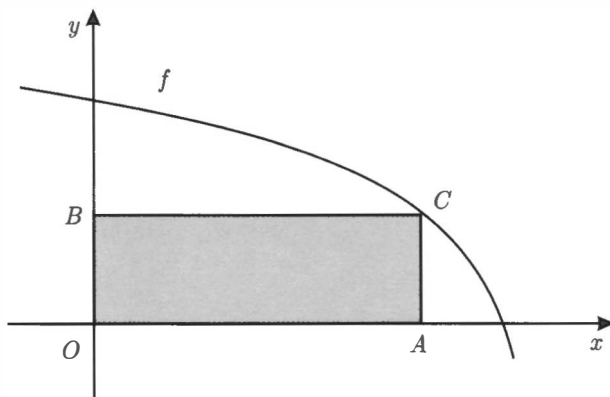



Figura 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do rectângulo $[OACB]$ é máxima.

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do rectângulo $[OACB]$ em função da abcissa do ponto A;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

............(8 × 5 pontos)............ 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
- 1.1. .... 15 pontos
- 1.2. .... 15 pontos

2.
- 2.1. .... 10 pontos
- 2.2. .... 15 pontos
- 2.3. .... 15 pontos

3.
- 3.1. .... 15 pontos
- 3.2. .... 15 pontos

4.
- 4.1. .... 15 pontos
- 4.2. .... 15 pontos

5. .... 15 pontos

6. .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Resoluções pág. 253

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Probabilidades

Axiomática

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$
- $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $\frac{5}{14}$ **(B)** $\frac{9}{14}$ **(C)** $\frac{9}{20}$ **(D)** $\frac{11}{20}$

2. Para assistirem a um espetáculo, o João, a Margarida e cinco amigos sentam-se, ao acaso, numa fila com sete lugares.

Combinatória

Qual é a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro?

(A) $\frac{2 \times 5!}{7!}$ **(B)** $\frac{5!}{7!}$ **(C)** $\frac{2}{7}$ **(D)** $\frac{5}{7}$

3. Numa caixa com 12 compartimentos, pretende-se arrumar 10 copos, com tamanho e forma iguais: sete brancos, um verde, um azul e um roxo. Em cada compartimento pode ser arrumado apenas um copo.

Combinatória

De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os 10 copos nessa caixa?

(A) ${}^{12}A_7 \times 3!$ **(B)** ${}^{12}A_7 \times {}^{5}C_3$ **(C)** ${}^{12}C_7 \times {}^{5}A_3$ **(D)** ${}^{12}C_7 \times {}^{12}A_3$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - 3$

Funções

Teorema de Bolzano

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

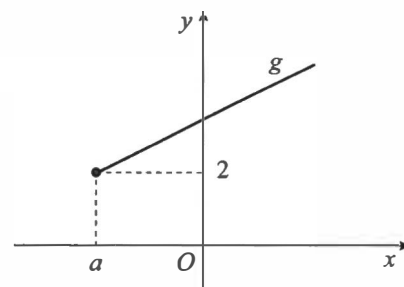
(A) $\left]0, \frac{1}{5}\right[$ **(B)** $\left]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$ **(C)** $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$ **(D)** $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$

Continuidade

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g, de domínio $[a, +\infty[$, com $a < -\frac{1}{3}$

Figura 1

Para esse valor de a, a função f, contínua em $\mathbb{R}$, é definida

por $f(x) = \begin{cases} \log_3\left(-x - \frac{1}{3}\right) & \text{se } x < a \\ g(x) & \text{se } x \geq a \end{cases}$

Qual é o valor de a?

(A) $-\frac{28}{3}$ **(B)** $-\frac{25}{3}$ **(C)** $-\frac{19}{3}$ **(D)** $-\frac{8}{3}$

1.ª derivada e 2.ª derivada

6. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$

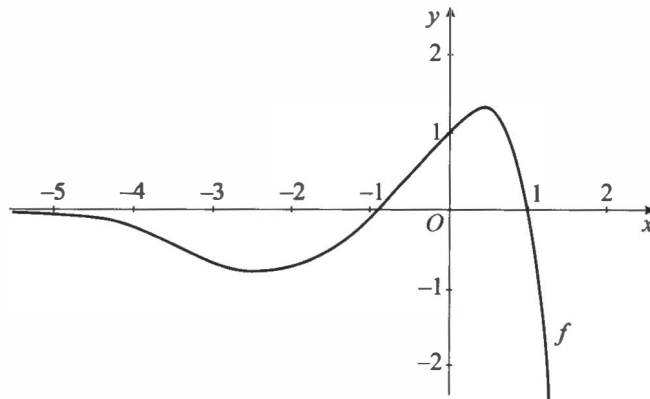



Figura 2

Sejam f' e f'', de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de f, respetivamente.

Qual dos valores seguintes pode ser positivo?

(A) $f'(1)$ **(B)** $f'(-3)$ **(C)** $f''(-3)$ **(D)** $f''(1)$

N.os complexos

Operações

7. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $\frac{w}{3i}$?

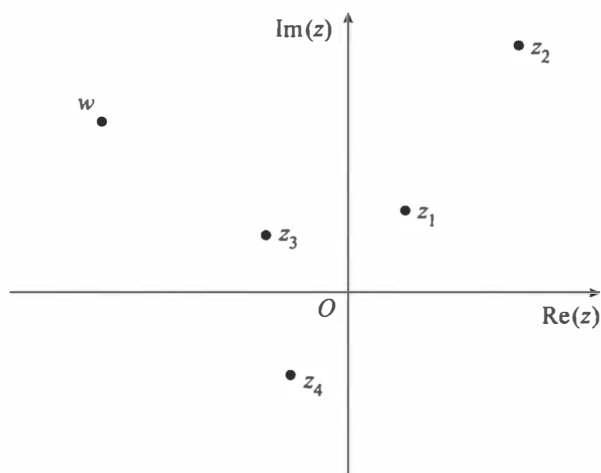
(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

Figura 3

Conjuntos e condições

8. Na Figura 4, está representada, a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular.

Sabe-se que:

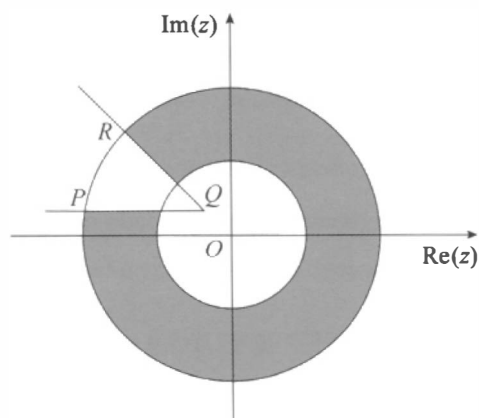
- O é a origem do referencial;
- o ponto Q é a imagem geométrica do complexo $-1+i$
- a reta PQ é paralela ao eixo real;
- as circunferências têm centro na origem;
- os raios das circunferências são iguais a 3 e a 6

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

Figura 4

Qual das condições seguintes pode definir, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a região a sombreado, incluindo a fronteira?

(A) $3 \leq |z| \leq 6 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z-1+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(B) $9 \leq |z| \leq 36 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(C) $3 \leq |z| \leq 6 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

(D) $9 \leq |z| \leq 36 \ \wedge \ -\pi \leq \arg(z-1+i) \leq \frac{3\pi}{4}$

N.^{os} complexos

Equações

Potências, raízes e demonstrações

Probabilidades

Probabilidade condicionada

Combinatória

Distribuições de probabilidades

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = (-2+i)^3$ e $z_2 = \frac{1+28i}{2+i}$

1.1. Resolva a equação $z^3 + z_1 = z_2$, sem recorrer à calculadora.

Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

1.2. Seja w um número complexo não nulo.

Mostre que, se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então $z = 1$ ou $z = -1$

2. Numa escola, realizou-se um estudo sobre os hábitos alimentares dos alunos. No âmbito desse estudo, analisou-se o peso de todos os alunos.

Sabe-se que:

- 55% dos alunos são raparigas;
- 30% das raparigas têm excesso de peso;
- 40% dos rapazes não têm excesso de peso.

2.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de peso.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora que a escola onde o estudo foi realizado tem 200 alunos.

Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos para representarem a escola num concurso.

Determine a probabilidade de serem escolhidos duas raparigas e um rapaz.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Num saco estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: $-2, -1, 0, 1$ e 2

Extraem-se, ao acaso e em simultâneo, quatro bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números inscritos nas bolas extraídas».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Elabore uma composição na qual:

- explique os valores da variável X
- justifique cada uma das probabilidades.

Funções

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, e a função g, de domínio $]0,+\infty[$, definidas por

$$f(x)=e^{x-2}-\frac{4e^{-x}+4}{e^2} \quad \text{e} \quad g(x)=-\ln(x)+4$$

Exponenciais e logaritmos

4.1. Mostre que $\ln(2+2\sqrt{2})$ é o único zero da função f, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Resolução gráfica

4.2. Considere, num referencial o. n. xOy, os gráficos das funções f e g e o triângulo $[OAB]$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A e B são pontos do gráfico de f
- a abcissa do ponto A é o zero da função f
- o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o gráfico da função g

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos das funções f e g, devidamente identificados, incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x & \text{se } x>0 \\ x\,e^{1-x} & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Assíntotas

5.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

1.ª derivada

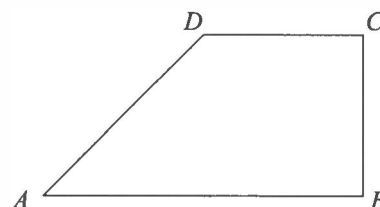
5.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x=-1$

Funções

6. Na Figura 5, está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$

Figura 5

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Funções trignométricas

1.ª derivada

6.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α, por $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

6.2. Para um certo número real θ, tem-se que $tg\theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Determine o valor exato de $P'(\theta)$

Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos) .... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
- **1.1.** .... 15 pontos
- **1.2.** .... 15 pontos

2.
- **2.1.** .... 15 pontos
- **2.2.** .... 10 pontos

3. .... 15 pontos

4.
- **4.1.** .... 15 pontos
- **4.2.** .... 15 pontos

5.
- **5.1.** .... 15 pontos
- **5.2.** .... 15 pontos

6.
- **6.1.** .... 15 pontos
- **6.2.** .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Probabilidades

Combinatória

1. O código de acesso a uma conta de e-*mail* é constituído por quatro letras e três algarismos. Sabe-se que um código tem quatro «a», dois «5» e um «2», como, por exemplo, o código 2aa5a5a

   Quantos códigos diferentes existem nestas condições?

   (A) 105 **(B)** 210 **(C)** 5040 **(D)** 39

Distribuições de probabilidades

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	b^3	a	$2a$

   Sabe-se que:

   - a e b são números reais;
   - o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$

   Qual é o valor de b?

   (A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

Triângulo de Pascal

3. Numa certa linha do triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é 111

   Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha.

   Qual é a probabilidade de esse elemento ser maior do que 10^5?

   (A) $\frac{3}{56}$ **(B)** $\frac{53}{56}$ **(C)** $\frac{2}{37}$ **(D)** $\frac{35}{37}$

Funções

Limite segundo Heine

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-1, 3[$

Figura 1

Sabe-se que:

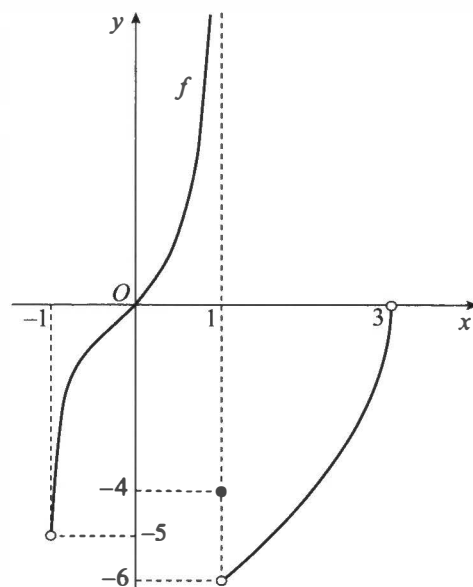
- $f(1) = -4$
- a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f
- (x_n) é uma sucessão com termos em $]-1, 1[$
- $\lim(x_n) = 1$

Qual é o valor de $\lim(f(x_n))$?

(A) $+\infty$

(B) -4

(C) -5

(D) -6

1.ª derivada

5. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $]-6, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x}{3} + 2\right)$

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a inclinação da reta r é, em radianos, $\frac{\pi}{4}$

Qual é o valor de a?

(A) -4

(B) $-\frac{9}{2}$

(C) $-\frac{11}{2}$

(D) -5

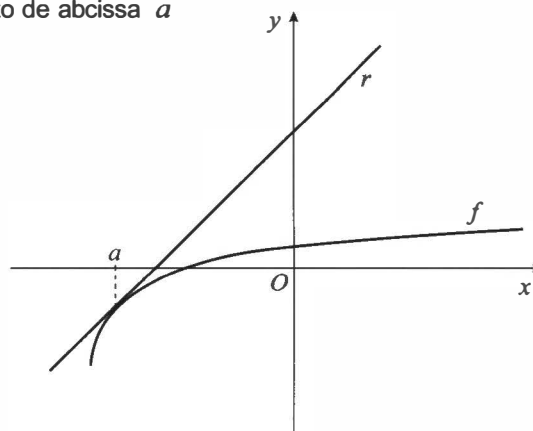



Figura 2

Assíntotas

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

Em qual das opções seguintes as duas equações definem assíntotas do gráfico da função f ?

(A) $x = 1$ e $y = -2x + 1$

(B) $x = 1$ e $y = 2x + 1$

(C) $y = 3$ e $y = -2x + 1$

(D) $y = 2$ e $y = 2x + 1$

N.ᵒˢ complexos

Operações

7. Seja k um número real, e sejam $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 - ki$ dois números complexos.

Qual é o valor de k para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um imaginário puro?

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{3}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 6

Potências e raízes

8. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEFGHI]$

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z

O vértice A tem coordenadas $(0, -3)$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice F ?

(A) $3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{18}$

(B) $3 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{18}$

(C) $3 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

(D) $3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{9}$

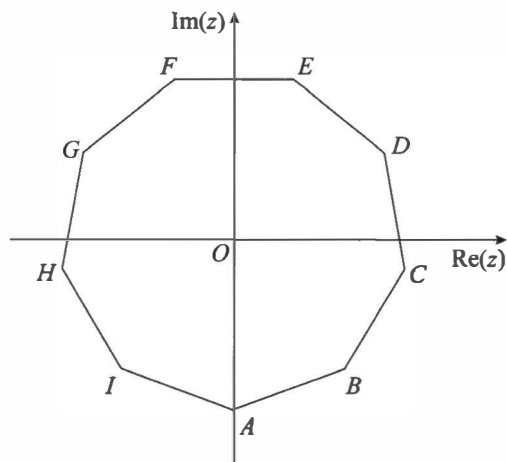



Figura 3

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

N.os complexos

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Operações

1.1. Seja n um número natural.

Determine $\dfrac{\sqrt{3}\times i^{4n-6}+2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)}$, sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Conjuntos e condições

1.2. Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $z_1 = \operatorname{cis}\alpha$ e $z_2 = \operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de $z_1 + z_2$, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

Probabilidades

2. A empresa AP comercializa pacotes de açúcar.

Distribuição normal e distribuição binomial

2.1. Seja Y a variável aleatória «massa, em gramas, de um pacote de açúcar comercializado pela empresa AP».

A variável aleatória Y segue uma distribuição normal de valor médio $6{,}5$ gramas e desvio padrão $0{,}4$ gramas.

Um pacote de açúcar encontra-se em condições de ser comercializado se a sua massa estiver compreendida entre $5{,}7$ gramas e $7{,}3$ gramas.

Determine o valor aproximado da probabilidade de, em 10 desses pacotes de açúcar, exatamente oito estarem em condições de serem comercializados.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

Combinatória

2.2. Considere o problema seguinte.

«A empresa AP pretende aplicar, junto dos seus funcionários, um programa de reeducação alimentar. De entre os 500 funcionários da empresa AP vão ser selecionados 30 para formarem um grupo para frequentar esse programa. A Joana e a Margarida são irmãs e são funcionárias da empresa AP. Quantos grupos diferentes podem ser formados de modo que, pelo menos, uma das duas irmãs, a Joana ou a Margarida, não seja escolhida para esse grupo?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

I) ${}^{500}C_{30} - {}^{498}C_{28}$ II) $2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$

Numa composição, apresente o raciocínio que conduz a cada uma dessas respostas.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(B) \neq 0$

Mostre que $P(\overline{A \cap B} \mid B) + P(A \mid B) = 1$

Axiomática

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{k+1} & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1 - e^{4x}}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Funções

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Determine k, de modo que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

Limites

4.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

Assintotas

4.3. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = f(x) - \dfrac{1}{x}$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

2.ª derivada

5. Considere a função f, de domínio $[-7, 0[$, definida por

$$f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$$

Resolução gráfica

Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja d a distância entre os pontos A e B

Determine d, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor de d com arredondamento às centésimas.

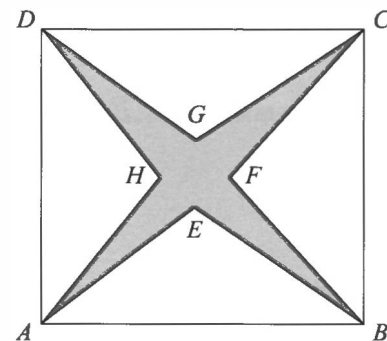
Funções

6. Na Figura 4, está representado o quadrado $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

Figura 4

Funções trigonométricas

6.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

Teorema de Bolzano

6.2. Mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é 5

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ....(8 × 5 pontos)..................... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.
- **1.1.** .... 15 pontos
- **1.2.** .... 15 pontos

2.
- **2.1.** .... 15 pontos
- **2.2.** .... 15 pontos

3. .... 15 pontos

4.
- **4.1.** .... 10 pontos
- **4.2.** .... 15 pontos
- **4.3.** .... 20 pontos

5. .... 15 pontos

6.
- **6.1.** .... 10 pontos
- **6.2.** .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Resoluções pág. 277

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Probabilidades — Combinatória

1. Uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número designa-se por capicua. Por exemplo, 103301 é capicua.

Quantos números com seis algarismos são capicuas?

(A) 729 **(B)** 900 **(C)** $810\,000$ **(D)** $900\,000$

Distribuições de probabilidades

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$1-3a$	$2a$	a

Sabe-se que $P(X=0 \vee X=1)=0{,}81$

Qual é o valor médio de X?

(A) $0{,}46$ **(B)** $0{,}27$ **(C)** $0{,}08$ **(D)** 0

Probabilidades

3. Considere um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um saco que contém cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: $0, 1, 2, 3$ e 4.

Lança-se o dado uma vez e retira-se, ao acaso, uma bola do saco, registando-se os números que saíram.

Qual é a probabilidade de o produto desses números ser igual a zero?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{15}$ **(C)** $\frac{1}{30}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

Funções

2.ª derivada

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de h'', segunda derivada de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$

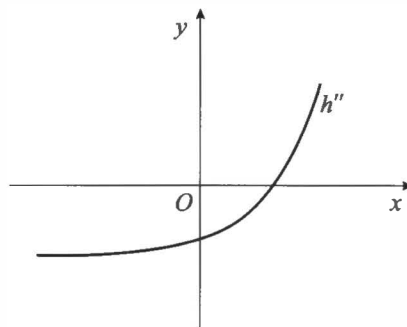



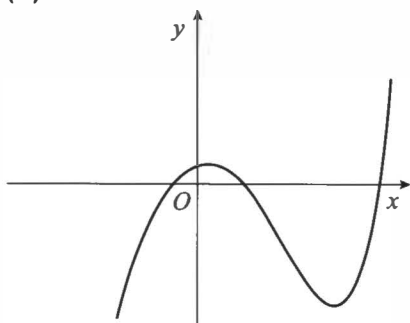
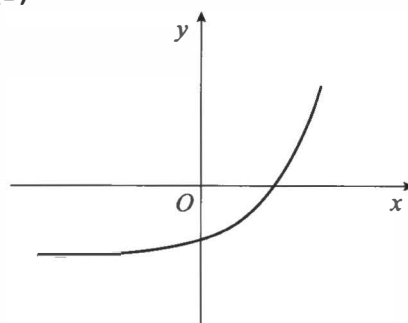
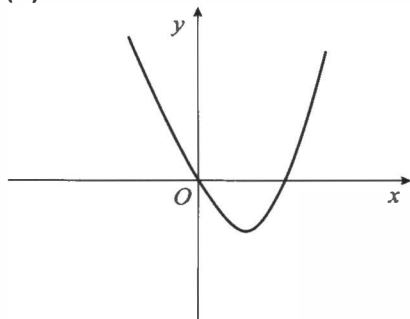
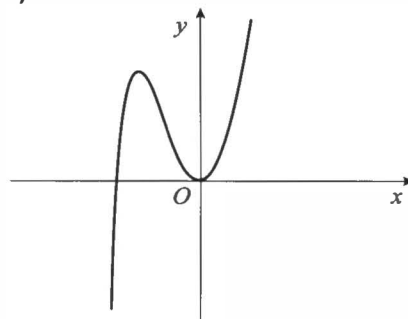
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h?

(A)

(B)

(C)

(D)

Assíntotas

5. Sejam f e g funções de domínio $]0, +\infty[$

Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f
- f não tem zeros;
- $g(x) = \frac{e^{-x} - 3}{f(x)}$

Qual das opções seguintes define uma assíntota horizontal do gráfico de g?

(A) $y = 3$ **(B)** $y = e$ **(C)** $y = 0$ **(D)** $y = -1$

Logaritmos

6. Sejam a, b e c três números tais que $a \in]1, +\infty[$, $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$

Sabe-se que $\log_a b = c$ e que $\log_a \sqrt{c} = 3$

Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a \sqrt{b \times c}$?

(A) $c + 3$ **(B)** $c - 3$ **(C)** $\frac{c}{2} + 3$ **(D)** $\frac{c}{2} - 3$

N.^{os} complexos

Operações

7. Sejam k e p dois números reais tais que os números complexos $z = 1 + i$ e $w = (k-1) + 2p\, i^{11}$ sejam inversos um do outro.

Qual é o valor de $k + p$?

(A) $-\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{5}{4}$ **(D)** $\frac{7}{4}$

8. Na Figura 2, estão representadas, no plano complexo, uma circunferência, de centro na origem e de raio 1, e uma reta r, definida por $\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}$

Seja z_1 o número complexo cuja imagem geométrica está no 1.º quadrante e é o ponto de intersecção da circunferência com a reta r

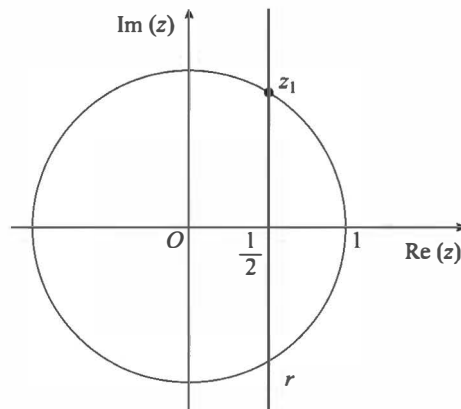



Figura 2

Qual das opções seguintes apresenta uma equação de que z_1 é solução?

(A) $|z-1|=|z-i|$ **(B)** $\operatorname{Im}(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\left|z-\frac{1}{2}\right|=1$ **(D)** $|1-z|=\sqrt{2}$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

N.ºs complexos

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

1.1. Considere o número complexo $z = 8\sqrt{3} - 8i$

Potências e raízes

Determine as raízes de índice 4 de z

Apresente as raízes na forma trigonométrica.

1.2. Seja w um número complexo não nulo.

Conjuntos, condições e demonstrações

Mostre que, se o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, então a imagem geométrica de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Considere uma empresa em que:

Probabilidades

- 80% dos funcionários apostam no euromilhões;
- dos funcionários que apostam no euromilhões, 25% apostam no totoloto;
- 5% dos funcionários não apostam no euromilhões nem no totoloto.

2.1. Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto.

Probabilidade condicionada

2.2. Considere agora que essa empresa tem 50 funcionários.

Combinatória

Escolhem-se, ao acaso, oito funcionários dessa empresa.

Determine a probabilidade de, pelo menos, sete desses funcionários serem apostadores no euromilhões.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Axiomática

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Mostre que, se A e B são dois acontecimentos independentes, então

$$P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A}) \times \left(1 - P(B)\right) = P(\overline{A})$$

Funções

4. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por

$$C(t) = 0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}, \text{ com } t \geq 0$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Teorema de Bolzano

4.1. Mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

1.ª derivada

4.2. Determine o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

5. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Continuidade

5.1. Determine k de modo que a função g seja contínua.

Funções trigonométricas e 1.ª derivada

5.2. Determine, em $]-2\pi, 5\pi[$, as soluções da equação $2f'(x) = \left(f(x) + x\right)^2 - 1$

6. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

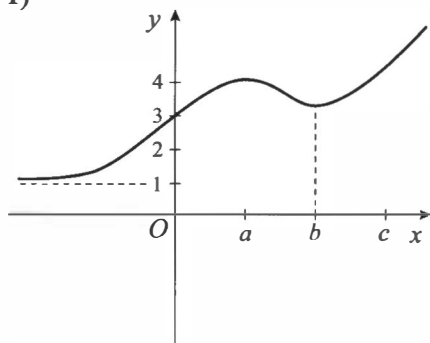
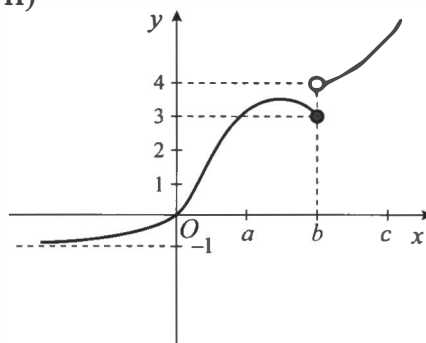
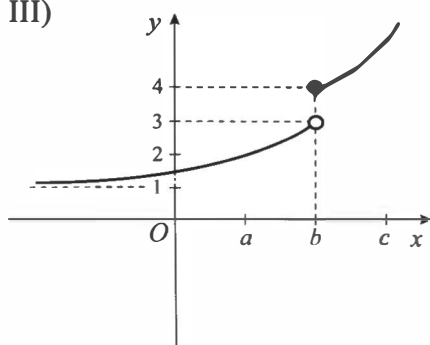
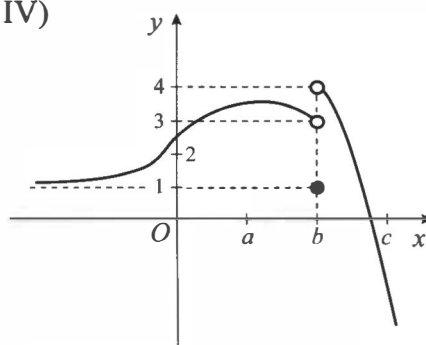
- a, b e c são números reais positivos e $a < b < c$
- h tem um mínimo relativo em $]a, c[$
- h é crescente em $]-\infty, 0[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(h(x) - 1\right) = 0$
- a segunda derivada, h'', da função h é tal que $h''(x) > 0$ para $x > b$

Apenas uma das opções seguintes pode representar uma parte do gráfico da função h

I)

II)

III)

IV)

Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar h
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

Resolução gráfica

7. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x + 1)$$

Seja P um ponto do gráfico de f

A distância do ponto P à origem é igual a 2

Determine a abcissa do ponto P, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos) .... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. .... 15 pontos
1.2. .... 15 pontos

2.

2.1. .... 15 pontos
2.2. .... 15 pontos

3. .... 15 pontos

4.

4.1. .... 10 pontos
4.2. .... 15 pontos

5.

5.1. .... 15 pontos
5.2. .... 15 pontos

6. .... 15 pontos

7. .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Resoluções pág. 289

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Num grupo de nove pessoas, constituído por seis homens e três mulheres, vão ser escolhidos três elementos para formarem uma comissão.

Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas mulheres?

(A) $^3C_2$ **(B)** $6 \times {}^3C_2$ **(C)** $^9A_3$ **(D)** $6 \times {}^3A_2$

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$2a$	b	b

Sabe-se que:

- a e b são números reais;
- $P(X > 1) = P(X < 2)$

Qual é o valor médio da variável aleatória X?

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $\frac{7}{5}$ **(C)** $\frac{17}{9}$ **(D)** $\frac{19}{12}$

3. Considere uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio 11 e desvio padrão σ

Sabe-se que σ é um número natural e que $P(X > 23) \approx 0{,}02275$

Qual é o valor de σ ?

(A) 12 **(B)** 11 **(C)** 6 **(D)** 4

Funções

Limite segundo Heine

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{x}$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=\dfrac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

Assíntotas

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+f(x)}{3x}=1$

Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) $y=\frac{1}{3}x$ **(B)** $y=\frac{2}{3}x$ **(C)** $y=x$ **(D)** $y=3x$

Funções exponenciais e 1.ª derivada

6. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=a^x$ e $g(x)=a^{-x}$

Considere as afirmações seguintes.

I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.

II) As funções f e g são monótonas crescentes.

III) $f'(-1)-g'(1)=\dfrac{2\ln a}{a}$

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) II e III são verdadeiras.

(B) I é falsa e III é verdadeira.

(C) I é verdadeira e III é falsa.

(D) II e III são falsas.

7. Na Figura 1, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos: w_1, w_2, w_3 e w_4

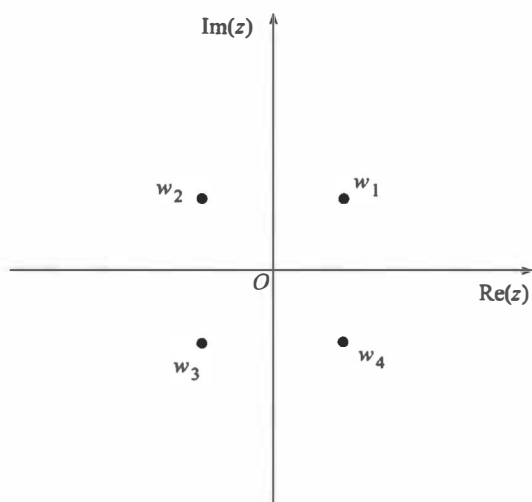



Figura 1

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$?

(A) w_1 **(B)** w_2

(C) w_3 **(D)** w_4

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = -8 + 6i$ e $w = \frac{-i \times z^2}{\bar{z}}$

Seja α um argumento do número complexo z

Qual das opções seguintes é verdadeira?

(A) $w = 10cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ **(B)** $w = 2cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

(C) $w = 10cis\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ **(D)** $w = 2cis\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

N.os complexos

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2\,cis\frac{3\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + i$

Potências e raízes

1.1. Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

Operações

1.2. Seja $z_3 = cis\,\alpha$

Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi, -\pi[$, sabendo que $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real.

Probabilidades

2. Uma caixa contém apenas bolas brancas e bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

Todas as bolas estão numeradas com um único número natural.

Sabe-se que:

- duas bolas em cada cinco são pretas;
- 20% das bolas pretas têm um número par;
- 40% das bolas brancas têm um número ímpar.

Probabilidade condicionada

2.1. Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa.

Determine a probabilidade de essa bola ser preta, sabendo que tem um número par.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Probabilidades

2.2. Admita agora que a caixa tem n bolas.

Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Determine n, sabendo que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Axiomática

Sabe-se que:

- $P(B) = \frac{1}{4}$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{15}{16}$
- $P(A \mid \overline{B}) = \frac{7}{12}$

Determine $P(A)$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

Funções

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.**, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

Assíntotas

4.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

1.ª derivada

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$

Resolva o item **4.3.**, recorrendo à calculadora gráfica.

4.3. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

Resolução gráfica

Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas $(2, 0)$
- B é o ponto de coordenadas $(5, 0)$
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P, considere o triângulo $[ABP]$

Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

1.ª derivada e assintotas

5. Na Figura 2 , está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 3

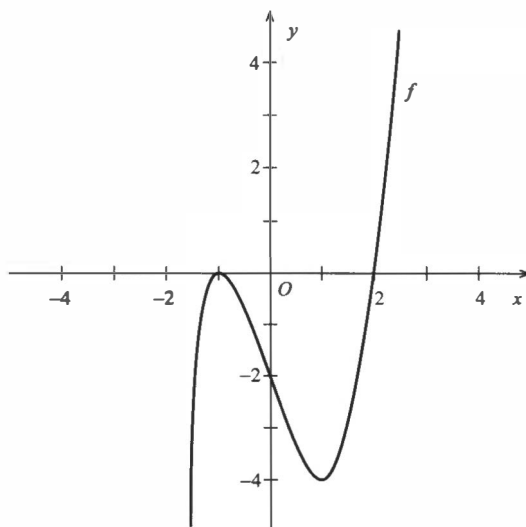
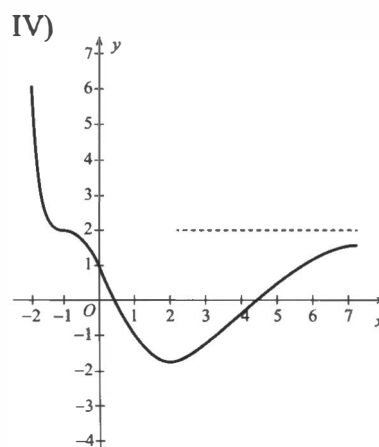
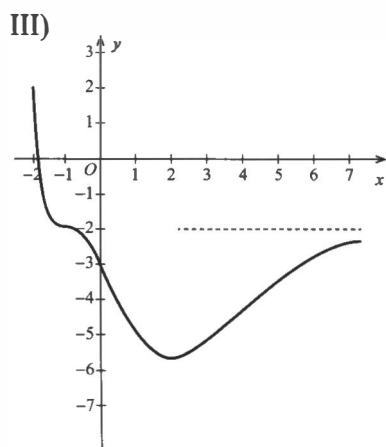
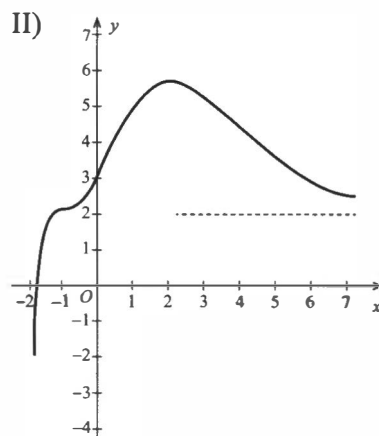
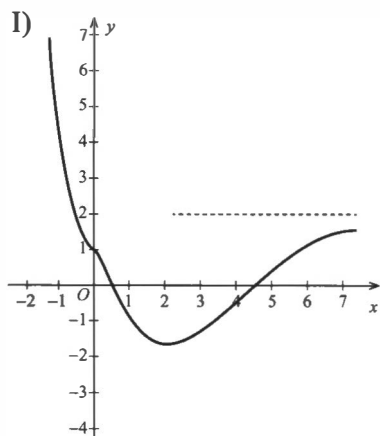



Figura 2

Sabe-se que:

- -1 e 2 são os únicos zeros da função f
- g', a primeira derivada de uma certa função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = f(x) \times e^{-x}$
- $\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - 2 \right] = 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g

I)

II)

III)

IV)

Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assintota desse gráfico.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a opção que pode representar a função g
- apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

Funções trignométricas e 1.ª derivada

6. Considere a função g, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, definida por $g(x) = \operatorname{sen}(2x) - \cos x$

Seja a um número real do domínio de g

A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa a é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$

Determine o valor de a, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Teorema de Bolzano

7. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f, contínua, de domínio $[-a, a]$

Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$

Mostre que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos) .... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. .... 15 pontos

1.2. .... 10 pontos

2.

2.1. .... 15 pontos

2.2. .... 15 pontos

3. .... 15 pontos

4.

4.1. .... 15 pontos

4.2. .... 15 pontos

4.3. .... 15 pontos

5. .... 15 pontos

6. .... 15 pontos

7. .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Resoluções pág. 301

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Na Figura 1, está representado um tabuleiro quadrado dividido em dezasseis quadrados iguais, cujas linhas são A, B, C e D e cujas colunas são 1, 2, 3 e 4. O João tem doze discos, nove brancos e três pretos, só distinguíveis pela cor, que pretende colocar no tabuleiro, não mais do que um em cada quadrado.

Figura 1

De quantas maneiras diferentes pode o João colocar os doze discos nos dezasseis quadrados do tabuleiro?

(A) ${}^{16}C_{12}$ **(B)** ${}^{16}C_9 \times {}^{7}C_3$ **(C)** ${}^{16}A_{12}$ **(D)** ${}^{16}A_9 \times {}^{7}A_3$

2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 484.

Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 1000?

(A) $\frac{15}{23}$ **(B)** $\frac{6}{11}$ **(C)** $\frac{17}{23}$ **(D)** $\frac{8}{11}$

3. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a(a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b}$?

(A) $6 + b$ **(B)** $8 + b$ **(C)** $6 + a^b$ **(D)** $8 + a^b$

Teorema de Bolzano

4. Seja f uma função de domínio $[-e, 1]$

Sabe-se que:

- f é contínua no seu domínio;
- $f(-e) = 1$
- $f(1) = e$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A equação $f(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(B) A equação $f(x) = e$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(C) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

(D) A equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]-e, 1[$

1.ª derivada e 2.ª derivada

5. Sejam f' e f'', de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de uma função f, respetivamente.

Sabe-se que:

- a é um número real;
- P é o ponto do gráfico de f de abcissa a
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$
- $f''(a) = -2$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) a é um zero da função f

(B) $f(a)$ é um máximo relativo da função f

(C) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f

(D) P é ponto de inflexão do gráfico da função f

1.ª derivada

6. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial g, de grau 3

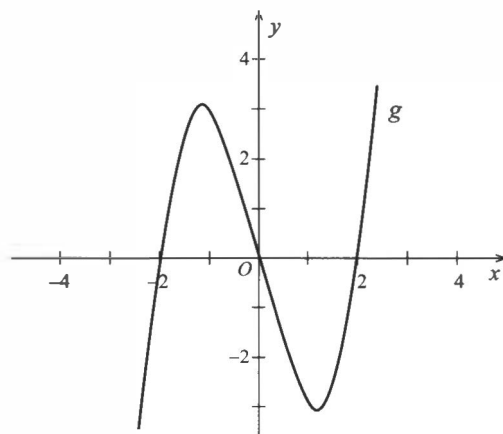



Figura 2

Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x-3)$

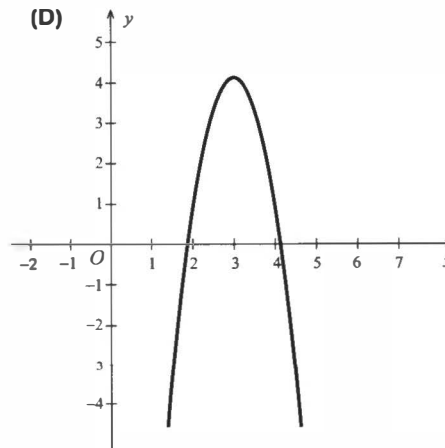
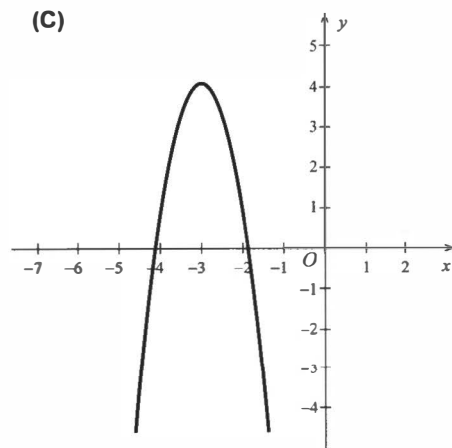
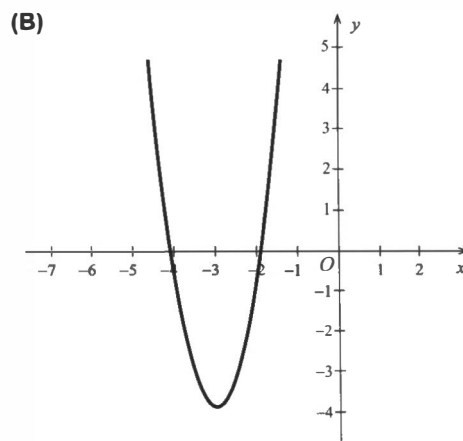
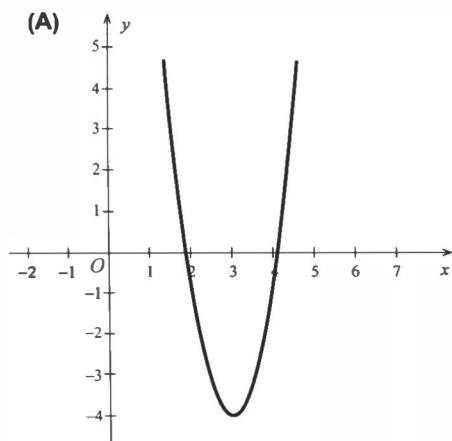
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada da função f?

(A)

(B)

(C)

(D)

N.os complexos

Operações e demonstrações

7. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z = 2 + bi$, com $b < 0$

Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual dos números complexos seguintes pode ser o conjugado de z ?

(A) $\frac{3}{2}cis(\alpha)$

(B) $3cis(-\alpha)$

(C) $3cis(\alpha)$

(D) $\frac{3}{2}cis(-\alpha)$

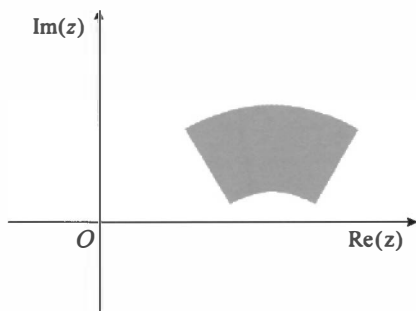
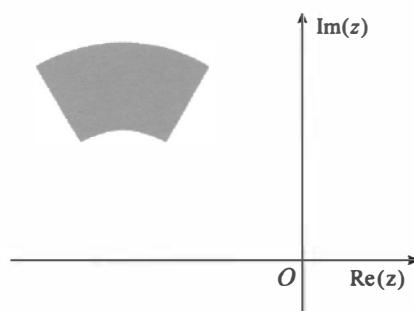
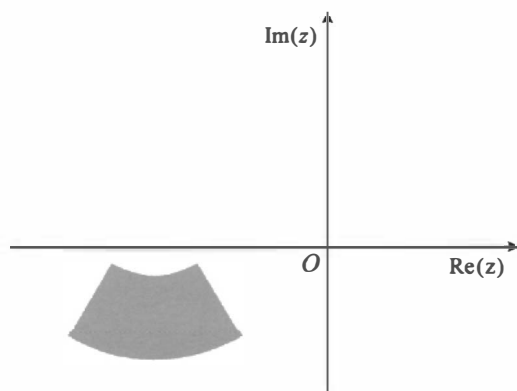
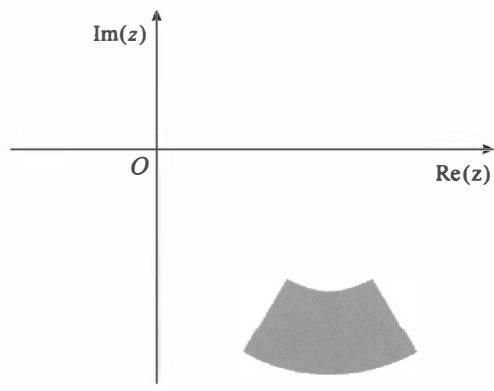
Conjuntos e condições

8. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3}$$

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

Qual das opções seguintes pode representar, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada?

(A)

(B)

(C)

(D)

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

N.ºs complexos

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Potências e raizes

1.1. Considere $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \frac{-2}{i\,z_1}$

Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

Operações

1.2. Seja $\alpha \in [-\pi, \pi[$

Mostre que $\dfrac{\cos(\pi-\alpha) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} = cis(\pi - 2\alpha)$

Probabilidades

Axiomática e probabilidade condicionada

2. Na Figura 3, está representado um dado cúbico, não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 3, em que faces opostas têm o mesmo número.

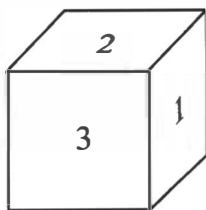



Figura 3

Lança-se o dado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A: «sair número ímpar»

B: «sair número menor do que 3»

Sabe-se que:

- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$
- $P(B \mid A) = \frac{2}{7}$

Determine a probabilidade de sair o número 3

3. Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas.

Distribuições de probabilidades

3.1. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa.

Seja X a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Considere agora a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, dois dos 20 jornalistas presentes nessa conferência de imprensa.

Seja Y a variável aleatória «número de jornalistas do sexo feminino escolhidos».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável Y

Apresente as probabilidades na forma de fração.

Combinatória

3.2. Considere o problema seguinte.

«Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas.

De quantas maneiras diferentes se podem sentar os 20 jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?»

Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.

Resposta I) ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$ Resposta II) ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$

Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.

Funções

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{3+x} + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}+\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Continuidade

4.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 1$

Assíntotas

4.2. Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$

2.ª derivada

5. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por

$$g'(x) = \ln(e^x + 6e^{-x} + 4x)$$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Resolução gráfica

6. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$, definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas $(2, 0)$ e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f

Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo $[AOP]$ é mínima.

Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar o valor da área do triângulo $[AOP]$ com arredondamento às centésimas.

Funções

7. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo $[OAB]$ e a reta r

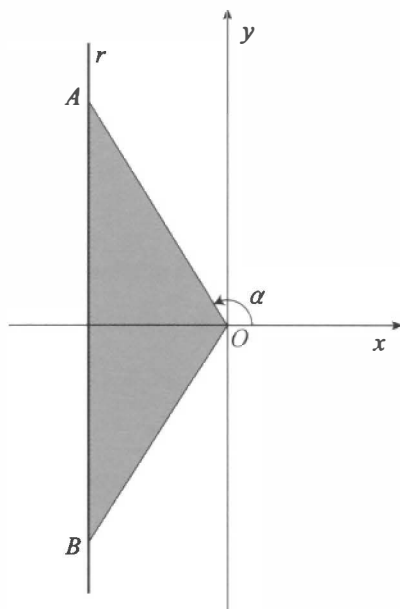



Figura 4

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $x=-3$
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$
- a função P, de domínio $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, é definida por $P(x)=-6\,tg\,x-\frac{6}{\cos x}$

Funções trigonométricas

7.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por $P(\alpha)$

1.ª derivada

7.2. Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, sem utilizar a calculadora.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos) .... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. .... 15 pontos

1.2. .... 15 pontos

2. .... 15 pontos

3.

3.1. .... 15 pontos

3.2. .... 15 pontos

4.

4.1. .... 15 pontos

4.2. .... 15 pontos

5. .... 15 pontos

6. .... 15 pontos

7.

7.1. .... 15 pontos

7.2. .... 10 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Resoluções pág. 315

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$

Probabilidades

Axiomática

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}55$
- A e B são acontecimentos incompatíveis.

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cap \overline{B})$?

(A) $0{,}85$

(B) $0{,}25$

(C) $0{,}15$

(D) 0

2. As classificações obtidas pelos alunos de uma escola num teste de Português seguem, aproximadamente, uma distribuição normal, de valor médio $11{,}5$ valores. Vai ser escolhido, ao acaso, um desses testes. Considere os acontecimentos seguintes.

Distribuição normal

I: «a classificação do teste é superior a 12 valores»

J: «a classificação do teste é superior a $16{,}5$ valores»

K: «a classificação do teste é inferior a 9 valores»

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $P(J) < P(K) < P(I)$

(B) $P(K) < P(I) < P(J)$

(C) $P(I) < P(K) < P(J)$

(D) $P(K) < P(J) < P(I)$

Combinatória

3. Numa turma com 15 raparigas e 7 rapazes, vai ser formada uma comissão com 5 elementos. Pretende-se que essa comissão seja mista e que tenha mais raparigas do que rapazes.

Quantas comissões diferentes se podem formar?

(A) ${}^{15}A_3 + {}^{15}A_4$

(B) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$

(C) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 \times {}^{15}C_4 \times 7$

(D) ${}^{22}C_3 \times {}^{19}C_2$

Funções

1.ª derivada e 2.ª derivada

4. Seja f uma função cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x) = (4+x)^2$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$

(B) A função f tem um máximo relativo em $x = -4$

(C) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.

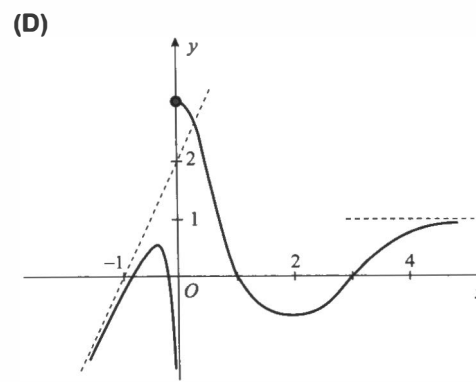
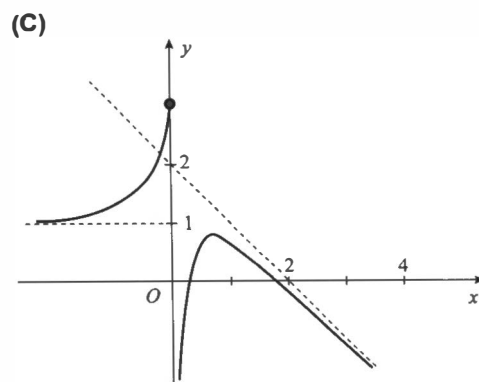
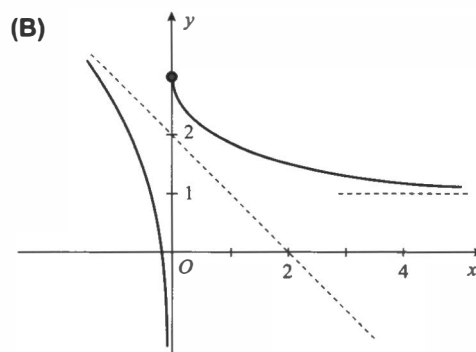
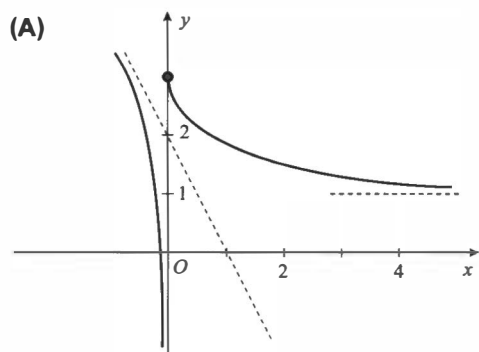
(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(-4, f(-4)\right)$

Assíntotas

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = 2$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

(B)

(C)

(D)

Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, assíntotas desse gráfico.

Logaritmos

6. Seja a um número real positivo.

Considere o conjunto $S = \left\{x \in \mathbb{R}: \ \ln(e^{-x} - a) \leq 0\right\}$

Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S?

(A) $]-\ln(1+a), \ -\ln a[$

(B) $[-\ln(1+a), \ -\ln a[$

(C) $]-\infty, \ -\ln(1+a)]$

(D) $[-\ln(1+a), \ +\infty[$

N.^{os} complexos

Conjuntos e condições

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = (1+i)^{2013}$

A qual dos conjuntos seguintes pertence w?

(A) $\{z \in \mathbb{C}: |z| > |z-1|\}$

(B) $\{z \in \mathbb{C}: \ |z| \leq \sqrt{2}\}$

(C) $\left\{z \in \mathbb{C}: z = \bar{z}\right\}$

(D) $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$

Operações

8. Na Figura 1, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos: z, z_1, z_2, z_3 e z_4

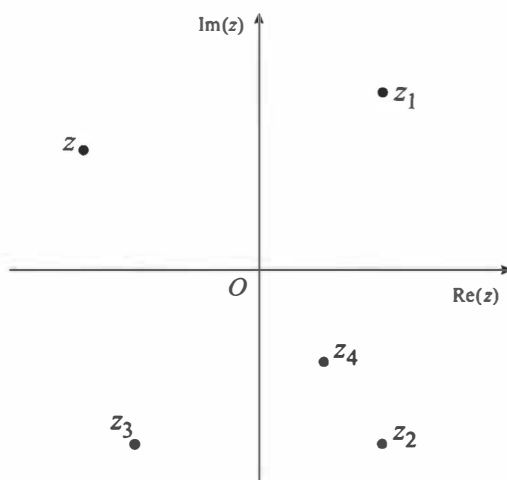



Figura 1

Sabe-se que w é um número complexo tal que $z = i \times \overline{w}$

Qual é o número complexo que pode ser igual a w?

(A) z_4

(B) z_3

(C) z_2

(D) z_1

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

N.os complexos

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+2i\,cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \quad \text{e} \quad z_2 = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Operações

1.1. Seja $z = cis\theta$, com θ pertencente a $[0, 2\pi[$

Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

Potências e raízes

1.2. As imagens geométricas de z_2 e do seu conjugado, $\overline{z_2}$, são vértices consecutivos de um polígono regular. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

Comece por calcular n

Probabilidades

Probabilidade condicionada

2. Uma empresa produz apenas dois tipos de lâmpadas: lâmpadas fluorescentes e lâmpadas LED (Díodos Emissores de Luz).

As lâmpadas de cada tipo podem ter a forma tubular ou ser compactas.

Sabe-se que:

- 55% das lâmpadas produzidas nessa empresa são fluorescentes;
- das lâmpadas fluorescentes produzidas nessa empresa, 50% têm a forma tubular;
- das lâmpadas LED produzidas nessa empresa, 90% são compactas.

Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Num saco estão doze bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 12.

3.1. O João retira três bolas do saco, ao acaso, de uma só vez.

Seja X a variável aleatória *«número de bolas retiradas com um número múltiplo de 5»*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

Distribuições de probabilidades

3.2. Considere agora o saco com a sua constituição inicial.

O João retira, ao acaso, uma bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco. Em seguida, retira, ao acaso, uma segunda bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco, e assim sucessivamente, até registar uma série de 8 números.

Considere a afirmação seguinte:

«A probabilidade de o João registar exatamente 5 números que sejam múltiplos de 3 é dada por $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^8C_5$, aplicando o modelo binomial.»

Elabore uma composição na qual:

- apresente um raciocínio que justifique a veracidade da afirmação;
- refira as condições de aplicabilidade do modelo binomial.

Distribuição binomial

4. Considere a função f, de domínio $]0,\pi[$, definida por $f(x) = \ln x + \cos x - 1$

Sabe-se que:

- A é um ponto do gráfico de f
- a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

Funções

Resolução gráfica

5. Considere, para um certo número real k positivo, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{1-e^{2x}} & \text{se } x<0\\[2ex] \ln k & \text{se } x=0\\[2ex] \dfrac{x}{2}-\ln\left(\dfrac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Limites

5.1. Determine k de modo que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

1.ª derivada

5.2. Mostre que $\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{3}\right)$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0,+\infty[$

Assíntotas

6. Considere duas funções g e h, de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que:

- a reta de equação $y=2x-1$ é assíntota do gráfico da função g
- a função h é definida por $h(x)=\dfrac{1-\left[g(x)\right]^2}{x^2}$

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

7. Na Figura 2, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo $[ACE]$

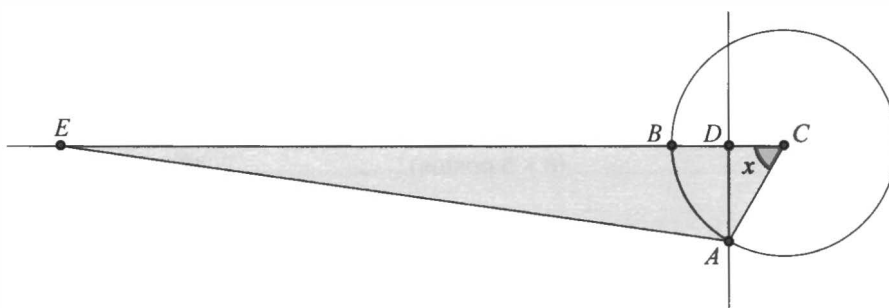



Figura 2

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- os pontos D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$
- a reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$
- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

7.1. Mostre que a área do triângulo $[ACE]$ é dada, em função de x, por $f(x) = 3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$

Funcões trigonométricas

7.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$

Teorema de Bolzano

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8.	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		15 pontos
3.		
	3.1.	15 pontos
	3.2.	15 pontos
4.		15 pontos
5.		
	5.1.	15 pontos
	5.2.	15 pontos
6.		15 pontos
7.		
	7.1.	15 pontos
	7.2.	10 pontos
		160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Probabilidades

Probabilidade condicionada e axiomática

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(A \cap B) = 0{,}2$
- $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}8$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}28$

(B) $0{,}52$

(C) $0{,}68$

(D) $0{,}80$

Combinatória

2. Considere todos os números naturais de dez algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9

Quantos desses números têm exatamente seis algarismos 2?

(A) ${}^{10}C_6 \times 8^4$

(B) ${}^{10}C_6 \times {}^{8}A_4$

(C) ${}^{10}A_6 \times {}^{8}A_4$

(D) ${}^{10}A_6 \times 8^4$

Funções

Limite segundo Heine

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Qual é o valor de $\lim \dfrac{2}{f(x_n)}$?

(A) $-\infty$

(B) $-e$

(C) 0

(D) $+\infty$

Teorema de Bolzano

4. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = k\, e^x + x$

O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, 1[$

A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k?

(A) $\left]-e, -\dfrac{1}{e}\right[$

(B) $\left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$

(C) $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$

(D) $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$

1.ª derivada

5. Considere, para um certo número real a positivo, a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)$$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada da função f?

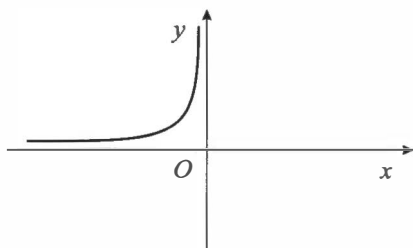
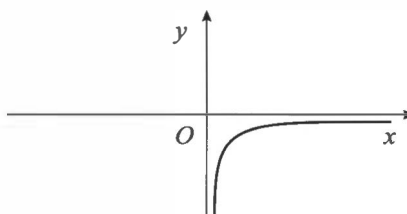
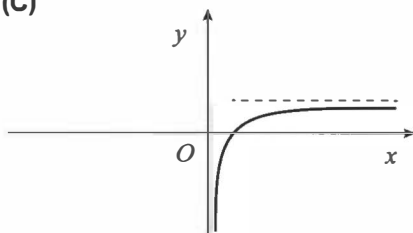
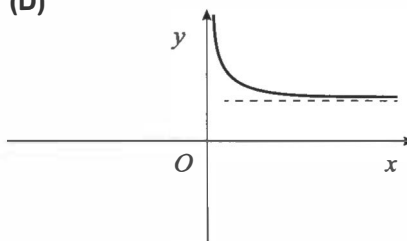
(A)

(B)

(C)

(D)

Geometria

Equações de retas e planos

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α, definido por $4x - z + 1 = 0$

Seja r uma reta perpendicular ao plano α

Qual das condições seguintes pode definir a reta r?

(A) $\frac{x}{4} = y \wedge z = -1$

(B) $x = 4 \wedge z = -1$

(C) $x - 3 = \frac{z}{4} \wedge y = 0$

(D) $\frac{x-3}{4} = -z \wedge y = 1$

7. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1

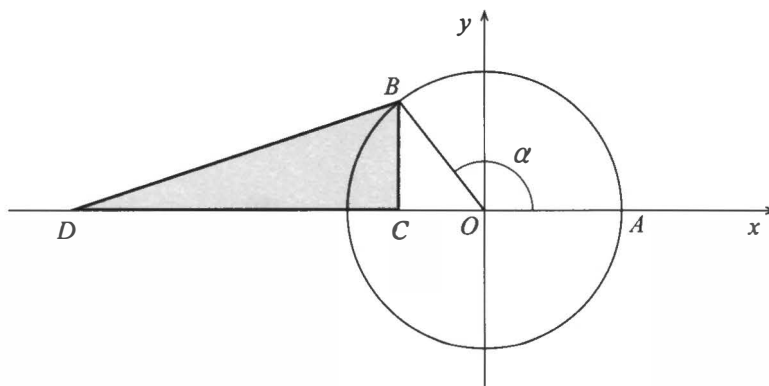



Figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$
- os pontos B e C têm a mesma abcissa;
- o ponto C tem ordenada zero;
- o ponto D tem coordenadas $(-3, 0)$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo $[BCD]$?

(A) $\frac{1}{2}(-3 - \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(B) $\frac{1}{2}(-3 + \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3 + \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

(D) $\frac{1}{2}(3 - \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

8. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEF]$

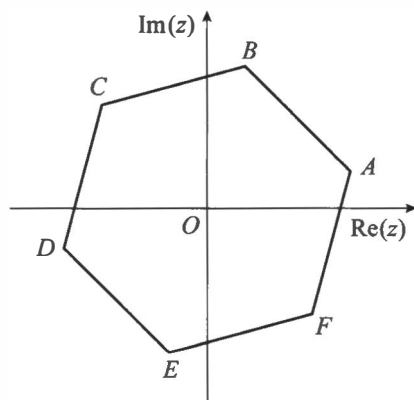



Figura 2

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z

O vértice C tem coordenadas $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice E?

(A) $2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{13}{12}\pi\right)$

(B) $4\ \text{cis}\left(\frac{13}{12}\pi\right)$

(C) $2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

(D) $4\ \text{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

N.ºs complexos

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Operações

1.1. Considere $z_1 = \dfrac{(-1+\sqrt{3}\,i)^3}{1-i}$ e $z_2 = \text{cis}\,\alpha$, com $\alpha \in [0, \pi[$

Determine os valores de α, de modo que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

Demonstrações

1.2. Seja z um número complexo tal que $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$

Mostre que $|z| \leq 2$

Probabilidades

2. Uma caixa tem nove bolas distinguíveis apenas pela cor: seis pretas, duas brancas e uma amarela.

Combinatória

2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas.

Determine a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Distribuições de probabilidades

2.2. Considere a caixa com a sua composição inicial.

Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa uma bola de cada vez, ao acaso e sem reposição, até ser retirada uma bola preta.

Seja X a variável aleatória «número de bolas retiradas dessa caixa».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3. Na Figura 3, está representada uma planificação de um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas com os números -1, 1, 2 e 3

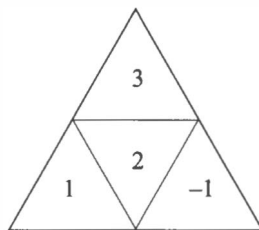



Figura 3

Considere a experiência aleatória que consiste em lançar esse dado duas vezes consecutivas e registar, após cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A: «o número registado no primeiro lançamento é negativo»

B: «o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo»

Elabore uma composição, na qual indique o valor de $P(A \mid B)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta, explique o significado de $P(A \mid B)$ no contexto da situação descrita, explique o número de casos possíveis, explique o número de casos favoráveis e apresente o valor de $P(A \mid B)$

4. Na Figura 4, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$, de aresta 3

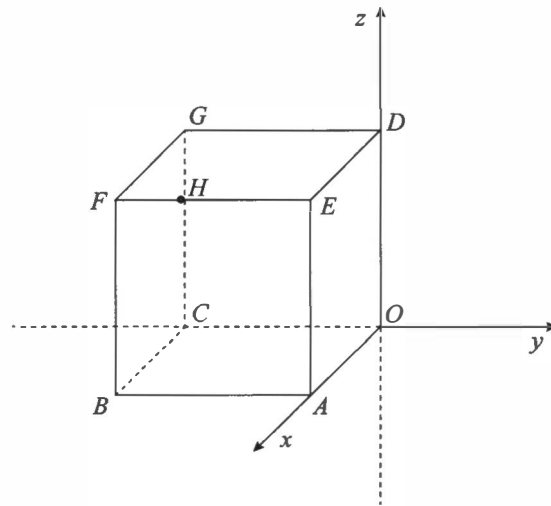



Figura 4

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- o ponto H tem coordenadas $(3, -2, 3)$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC

Determine o valor exato de $\operatorname{sen}^2\alpha$, sem utilizar a calculadora.

Funções

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x-4}-3x+11}{4-x} & \text{se } x<4 \\ \ln\left(2e^{x}-e^{4}\right) & \text{se } x\geq 4 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Continuidade

5.1. Averigue se a função f é contínua em $x=4$

Assíntotas

5.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y=x+b$, com $b\in\mathbb{R}$

Determine b

6. Seja f uma função cuja derivada f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x)=x-\operatorname{sen}(2x)$

1.ª derivada

6.1. Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$

2.ª derivada

6.2. Estude o gráfico da função f, quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f

Resolução gráfica

7. Considere a função f, de domínio $]-e^2, +\infty[$, definida por $f(x) = -\ln(x + e^2)$

Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$

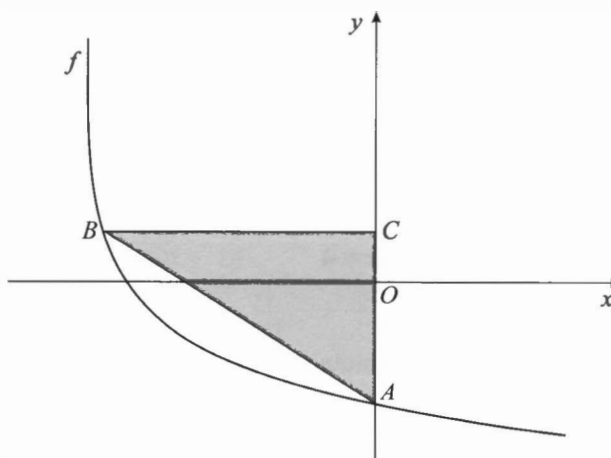



Figura 5

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, -2)$
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 8

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– escrever uma expressão da área do triângulo $[ABC]$ em função da abcissa do ponto B

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) .... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. .... 15 pontos

1.2. .... 15 pontos

2.

2.1. .... 15 pontos

2.2. .... 15 pontos

3. .... 15 pontos

4. .... 15 pontos

5.

5.1. .... 15 pontos

5.2. .... 15 pontos

6.

6.1. .... 10 pontos

6.2. .... 15 pontos

7. .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Resoluções pág. 343

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

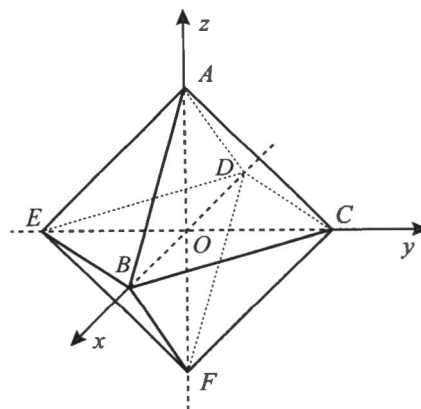
- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}48$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}08$ **(B)** $0{,}12$ **(C)** $0{,}2$ **(D)** $0{,}6$

2. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro $[ABCDEF]$, cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

Escolhem-se, ao acaso, três vértices desse octaedro.

Qual é a probabilidade de esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$?

(A) $\frac{1}{^6C_3}$

(B) $\frac{4}{^6C_3}$

(C) $\frac{8}{^6C_3}$

(D) $\frac{12}{^6C_3}$

Figura 1

Binómio de Newton

3. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10}$, com $x \neq 0$, não depende da variável x

Qual é esse termo?

(A) $10\,240$

(B) 8064

(C) 1024

(D) 252

Funções

Limite segundo Heine

4. Seja g uma função, de domínio $]-\infty, e[$, definida por $g(x)=\ln(e-x)$

Considere a sucessão estritamente crescente de termo geral $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Qual é o valor de $\lim g(x_n)$?

(A) $+\infty$

(B) e

(C) 1

(D) $-\infty$

Continuidade

5. Considere, para um certo número real k, a função f, contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} & \text{se } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ k-3 & \text{se } x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

6. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico da função g'', segunda derivada de uma função g

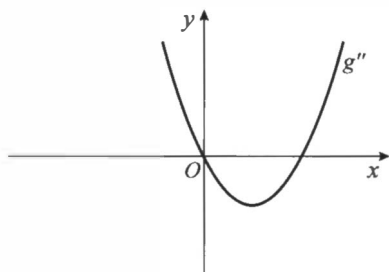
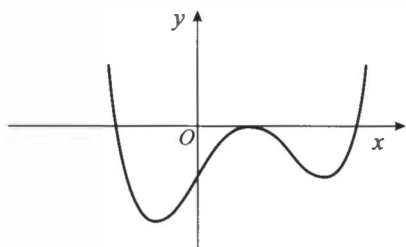
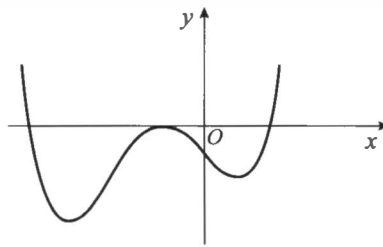
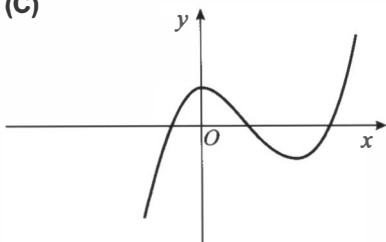
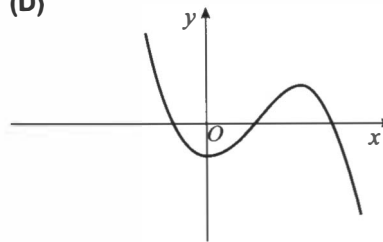



Figura 2

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g?

(A)

(B)

(C)

(D)

Geometria

Equações de retas e planos

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A, de coordenadas $(1, 0, 3)$, e o plano α, definido por $3x+2y-4=0$

Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A

Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

(A) $3x+2y-3=0$

(B) $2x-3y-z+1=0$

(C) $2x-3y+z=0$

(D) $3x+2y=0$

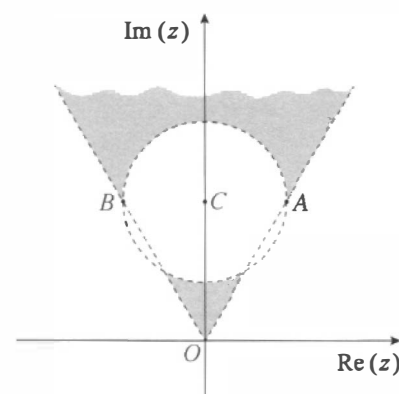
N.os complexos

Conjuntos e condições

8. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, duas semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$ e uma circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$

Figura 3

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto A é a imagem geométrica do complexo $\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$
- o ponto B é a imagem geométrica do complexo $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$
- o ponto C é a imagem geométrica do complexo $2i$

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

Qual das condições seguintes define a região sombreada, excluindo a fronteira?

(A) $|z-2i|<\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{4}<\arg(z)<\frac{3\pi}{4}$

(B) $|z-2i|<\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{3}<\arg(z)<\frac{2\pi}{3}$

(C) $|z-2i|>\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{3}<\arg(z)<\frac{2\pi}{3}$

(D) $|z-2i|>\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{4}<\arg(z)<\frac{3\pi}{4}$

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

N.os complexos

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Operações

1.1. Considere $z = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $w = \frac{(z-i)^4}{1+zi}$

No plano complexo, seja O a origem do referencial.

Seja A a imagem geométrica do número complexo $\overline{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w

Determine a área do triângulo $[AOB]$, sem utilizar a calculadora.

Equações

1.2. Seja $\alpha \in]0, \pi[$

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha\, z + 1 = 0$

Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

Probabilidades

2. Uma caixa tem seis bolas distinguíveis apenas pela cor: duas azuis e quatro pretas.

Combinatória

2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas da caixa. À medida que são retiradas da caixa, as bolas são colocadas lado a lado, da esquerda para a direita.

Determine a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Distribuições de probabilidades

2.2. Considere a caixa com a sua composição inicial.

Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas.

Seja X a variável aleatória «número de bolas azuis que existem no conjunto das três bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

Geometria

Produto escalar

3. Na Figura 4, está representado um pentágono regular $[ABCDE]$

Sabe-se que $\overline{AB} = 1$

Mostre que $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

Nota: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ designa o produto escalar do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo vetor $\overrightarrow{AD}$

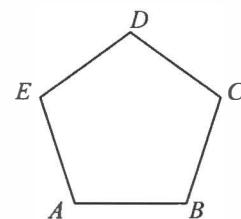



Figura 4

Funções

4. Considere as funções f e g, de domínio $]-\infty, 0[$, definidas por

$f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln(-x)}{x}$ e $g(x) = -x + f(x)$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Assíntotas

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, indique as suas equações.

Teorema de Bolzano

4.2. Mostre que a condição $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, -1[$

1.ª derivada

4.3. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

Funções trigonométricas

5. Na Figura 5, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S

Sabe-se que:

- os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
- $[PR]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
- $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
- $A(\alpha)$ é a área do quadrilátero $[PQRS]$, em função de α

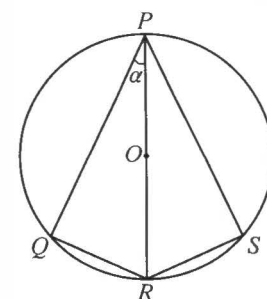



Figura 5

Para um certo número real θ, com $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\text{tg}\,\theta = 2\sqrt{2}$

Determine o valor exato de $A(\theta)$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Comece por mostrar que $A(\alpha) = 16\,\text{sen}\,\alpha \cos\alpha$

6. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[0,10]$, definida por $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$, e dois pontos A e B

Resolução gráfica

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa positiva;
- a reta AB tem declive -2

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;

– indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

7. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 3

Assíntotas, 1.ª derivada e 2.ª derivada

Sabe-se que:

- -2 e 3 são os únicos zeros da função f
- a função f tem um extremo relativo em $x = -2$
- h', primeira derivada de uma função h, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $h'(x) = \dfrac{f(x)}{e^{2x}}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$

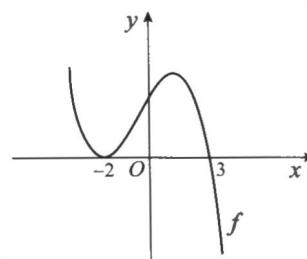



Figura 6

Considere as afirmações seguintes.

I) A função h tem dois extremos relativos.

II) $h''(-2) = 0$

III) $y + 3 = 0$ é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ....(8 × 5 pontos)...................... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. .... 15 pontos

1.2. .... 15 pontos

2.

2.1. .... 10 pontos

2.2. .... 15 pontos

3. .... 15 pontos

4.

4.1. .... 20 pontos

4.2. .... 10 pontos

4.3. .... 15 pontos

5. .... 15 pontos

6. .... 15 pontos

7. .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Probabilidades

Combinatória

1. Considere todos os números ímpares com cinco algarismos.

   Quantos desses números têm quatro algarismos pares e são superiores a $20\,000$?

   (A) 5^4

   (B) 5^5

   (C) 3×5^4

   (D) 4×5^4

Triângulo de Pascal

2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20

   Escolhendo, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser par?

   (A) $\frac{1}{5}$

   (B) $\frac{2}{5}$

   (C) $\frac{3}{5}$

   (D) $\frac{4}{5}$

Funções

Limite segundo Heine

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\frac{x-1}{e^x-1}$

   Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=-\frac{1}{n}$

   Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

   (A) $-\infty$

   (B) 0

   (C) 1

   (D) $+\infty$

4. Na Figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r

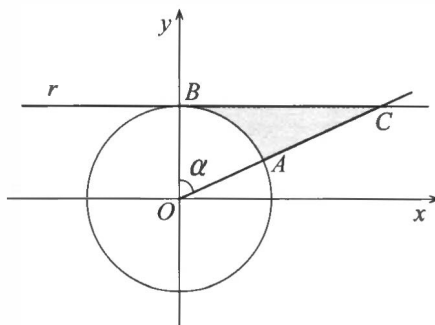



Figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(0, 1)$
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B
- o ponto C é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha}{2}$

(B) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{2}$

(C) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$

(D) $\frac{\alpha}{2}$

2.ª derivada

5. Seja f uma função de domínio $]-5, 5[$

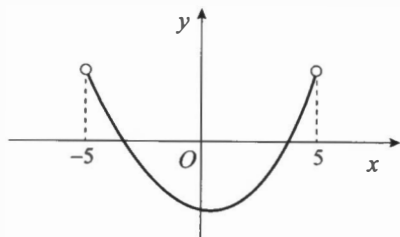
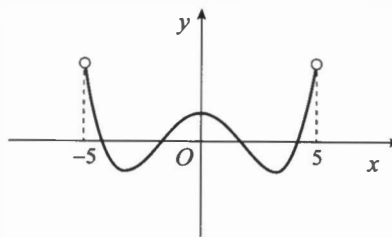
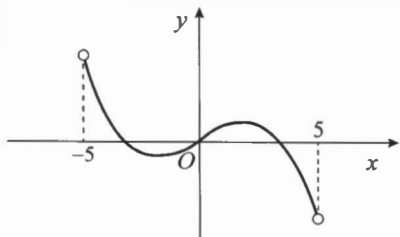
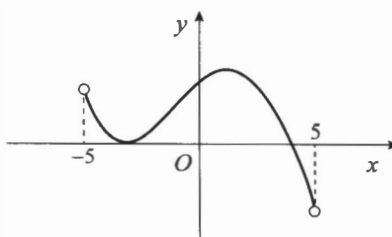
Sabe-se que o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f'', segunda derivada da função f ?

(A)

(B)

(C)

(D)

Assíntotas

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$

A reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico da função f

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x-1}{f(x)}$?

(A) 0

(B) 2

(C) 3

(D) $+\infty$

Geometria

Equações de retas e planos

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A, de coordenadas $(2,0,3)$, e o plano α, definido por $x-y-2z=3$

Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A

Qual das condições seguintes pode definir a reta r?

(A) $x+2=z+1 \ \wedge \ y=0$

(B) $-x+5=y+3=\frac{z+3}{2}$

(C) $\frac{x-1}{2}=\frac{z+2}{3} \ \wedge \ y=-1$

(D) $x-2=-y=z-3$

N.os complexos

Operações

8. Na Figura 2, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4

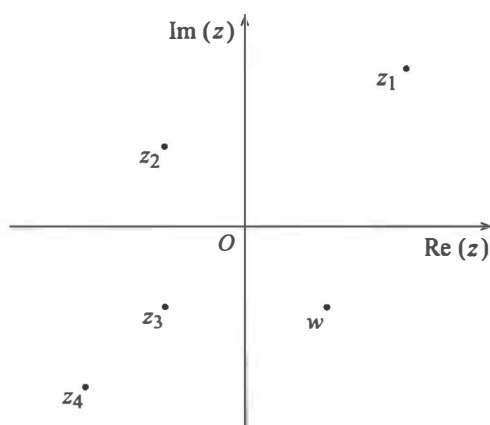



Figura 2

Qual é o número complexo que pode ser igual a $-2iw$?

(A) z_1

(B) z_2

(C) z_3

(D) z_4

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

N.os complexos

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora.

Operações

1.1. Considere $z_1 = \frac{1-i}{2i} - i^{-1}$ e $z_2 = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Averigue se a imagem geométrica do complexo $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Operações

1.2. Considere o número complexo $w = \text{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Escreva w na forma trigonométrica.

Probabilidades

2. De uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- 60% dos alunos são rapazes;
- 80% dos alunos estão inscritos no desporto escolar;
- 20% dos rapazes não estão inscritos no desporto escolar.

Probabilidade condicionada

2.1. Determine a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Combinatória

2.2. Considere agora que essa turma de 12.º ano tem 25 alunos.

Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos dessa turma para a representarem num evento do desporto escolar.

Determine a probabilidade de serem escolhidos, pelo menos, dois alunos que estão inscritos no desporto escolar.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Axiomática

3. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis;
- A e B são acontecimentos independentes.

Mostre que $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$

Geometria

Equações de retas e planos

4. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCOD]$

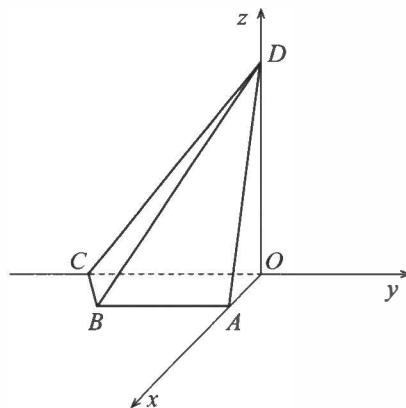



Figura 3

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- os pontos A e B têm igual abcissa;
- o ponto B pertence ao plano xOy e tem ordenada -3
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- a reta AD é definida por $\frac{x-3}{3} = -\frac{z}{5} \wedge y = 0$
- $\|\overrightarrow{CD}\|^2 = 41$

Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano que contém a face $[BCD]$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $]-\infty, e[$, definida por

Funções

$$f(x)=\begin{cases} x\,e^{x-2} & \text{se } x\le 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}+k & \text{se } 2<x<e \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Determine k, de modo que a função f seja contínua em $x=2$

Continuidade

5.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal do seu gráfico e, caso exista, indique uma equação dessa assíntota.

Assíntotas

6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$

6.1. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

1.ª derivada

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

6.2. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, os pontos A e B, e a reta r de equação $y=mx$, com $m<0$

Resolução gráfica

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
- a abcissa do ponto A é o zero da função g
- o ponto B é o ponto de intersecção da reta r com o gráfico da função g
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Assíntotas, 1.ª derivada e Teorema de Bolzano

7. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- a reta de equação $x=0$ é assíntota do gráfico da função f
- $f(-3)\times f(5)<0$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$

Considere as afirmações seguintes.

I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo $[-3,5]$, a existência de, pelo menos, um zero da função f

II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$

III) A função f é crescente em $]0,+\infty[$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) .... 40 pontos

40 pontos

GRUPO II

1.

1.1. .... 15 pontos

1.2. .... 15 pontos

2.

2.1. .... 15 pontos

2.2. .... 15 pontos

3. .... 10 pontos

4. .... 15 pontos

5.

5.1. .... 15 pontos

5.2. .... 15 pontos

6.

6.1. .... 15 pontos

6.2. .... 15 pontos

7. .... 15 pontos

160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Probabilidades

Combinatória

1. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares.

   De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?

   (A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

Axiomática

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
   Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

   Sabe-se que:
   - $P(A) = 0{,}4$
   - $P(\overline{B}) = 0{,}7$
   - $P(A \cup B) = 0{,}5$

   Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup \overline{B})$?

   (A) $0{,}6$ **(B)** $0{,}7$ **(C)** $0{,}8$ **(D)** $0{,}9$

Funções

Logaritmos

3. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

   (A) $\frac{k}{2}$ **(B)** $k-2$ **(C)** $\frac{k}{9}$ **(D)** $k-9$

Limite segundo Heine

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$
   Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$

   Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

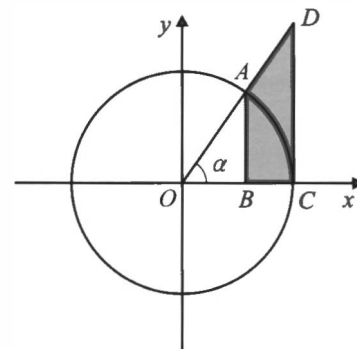
   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $+\infty$

Funções trigonométricas

5. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.

Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

(B) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(D) $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

N.os complexos

Conjuntos e condições

6. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$|z + 4 - 4i| = 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

Geometria

Equações de retas e planos

7. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, um triângulo equilátero $[ABC]$

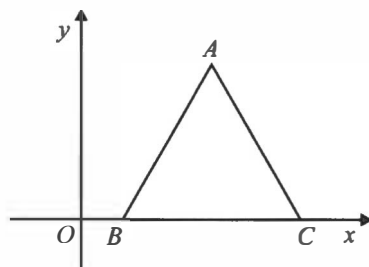



Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox
- o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1

Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y = \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}$

(B) $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}$

(C) $y = \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

(D) $y = \sqrt{3}\,x - \sqrt{3}$

Sucessões

Sucessões definidas por recorrência

8. Seja a um número real.

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $6a + 4$

(B) $9a - 4$

(C) $6a - 4$

(D) $9a + 4$

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

N.os complexos

Operações

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\theta}$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Probabilidades

2. De uma empresa com sede em Coimbra, sabe-se que:

- 60% dos funcionários residem fora de Coimbra;
- os restantes funcionários residem em Coimbra.

Probabilidade condicionada

2.1. Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:

- o número de homens é igual ao número de mulheres;
- 30% dos homens residem fora de Coimbra.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa.

Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Combinatória

2.2. Considere agora que a empresa tem oitenta funcionários.

Escolhem-se, ao acaso, três funcionários dessa empresa.

A probabilidade de, entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.

Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

3. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso.

Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada.

Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5-t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$$

Figura 3

Função exponencial

3.1. Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é $16\,\text{cm}$

Determine o volume da esfera.

Apresente o resultado em cm^3, arredondado às centésimas.

1.ª derivada

3.2. Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x < \dfrac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

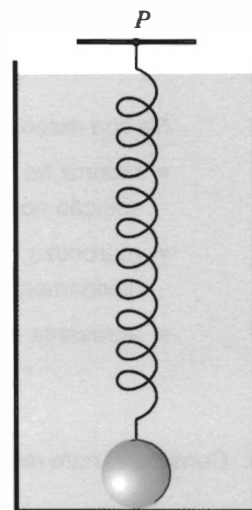
Assíntotas

4.1. Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

2.ª derivada

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

Resolução gráfica e Teorema de Bolzano

4.3. Mostre que a equação $f(x)=3$ é possível em $]1, e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x)=3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

Geometria

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$

Equações de retas e planos

5.1. Considere o plano α de equação $x-2y+z+3=0$

Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

Lugares geométricos

5.2. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

Produto escalar

5.3. Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:

- a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
- a sua ordenada é positiva;
- $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$

Determine a ordenada do ponto P

Funções

1.ª derivada

6. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x)=1-\cos(3x) \quad \text{e} \quad g(x)=\operatorname{sen}(3x)$$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$

Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a+\frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $\operatorname{sen}(3a) = -\frac{1}{3}$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** (8 × 5 pontos)	40 pontos	
		40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos	
2.		
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.		
3.1.	10 pontos	
3.2.	15 pontos	
4.		
4.1.	15 pontos	
4.2.	15 pontos	
4.3.	15 pontos	
5.		
5.1.	5 pontos	
5.2.	10 pontos	
5.3.	15 pontos	
6.	15 pontos	
		160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Probabilidades

Distribuições de probabilidades

1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma certa variável aleatória X é

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	a	$2a$	0,4

(a designa um número real)

Qual é o valor médio desta variável aleatória?

(A) 2,1 **(B)** 2,2 **(C)** 2,3 **(D)** 2,4

Probabilidade condicionada

2. Um saco contém nove bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas e as restantes são brancas.

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco e observa-se a sua cor e o seu número.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

A: *«a bola retirada é preta»*

B: *«o número da bola retirada é um número par»*

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

Funções

Logaritmos

3. Para certos valores de a e de b $(a>1$ e $b>1)$, tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a(a^2b)$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** 2 **(D)** 5

Continuidade

4. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2+e^{x+k} & \text{se } x\leq 0 \\ \dfrac{2x+\ln(x+1)}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 0

(B) 1

(C) $\ln 2$

(D) $\ln 3$

Funções trigonométricas e 2.ª derivada

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3\,\text{sen}^2(x)$

Qual das expressões seguintes define a função f'', segunda derivada de f?

(A) $6\,\text{sen}(2x)\cos(x)$

(B) $6\,\text{sen}(x)\cos(2x)$

(C) $6\cos(2x)$

(D) $6\,\text{sen}(2x)$

N.os complexos

Operações

6. Na Figura 1, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero $[OAB]$

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A pertence ao eixo real e tem abcissa igual a 1
- o ponto B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um complexo z

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $z=\sqrt{3}\,\text{cis}\,\dfrac{11\pi}{6}$

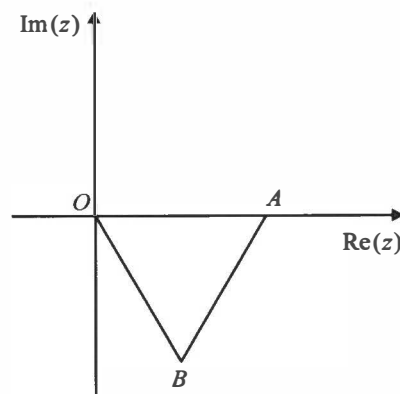
(B) $z=\text{cis}\,\dfrac{11\pi}{6}$

(C) $z=\sqrt{3}\,\text{cis}\,\dfrac{5\pi}{3}$

(D) $z=\text{cis}\,\dfrac{5\pi}{3}$

Figura 1

Geometria

Equações de retas e lugares geométricos

7. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência definida pela equação

$$x^2+(y-1)^2=2$$

Esta circunferência intersecta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva.

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A

Qual é a equação reduzida da reta r?

(A) $y=x+1$

(B) $y=x-1$

(C) $y=2x+2$

(D) $y=2x-2$

Sucessões

Monotonia e limitação

8. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

(A) $(-1)^n$

(B) $(-1)^n.n$

(C) $-\frac{1}{n}$

(D) $1+n^2$

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

N.os complexos

Potências e raízes

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{12}}$

Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$, sem utilizar a calculadora.

Apresente esses números na forma trigonométrica.

Funções

2. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.

A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$

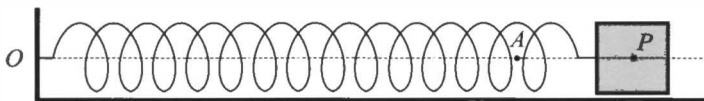



Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.

Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo $(t \in [0, +\infty[)$.

Resolva os itens **2.1.** e **2.2.** sem recorrer à calculadora.

Funções. trigonométricas

2.1. No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A

Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez.

Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu.

Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

Teorema de Bolzano

2.2. Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a $1,1$ metros.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases}1+xe^x & \text{se } x\leq 3\\ \ln(x-3)-\ln(x) & \text{se } x>3\end{cases}$

Resolva os itens **3.1.**, **3.2.** e **3.3.**, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

3.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

Assíntotas

3.2. Resolva, em $]-\infty,3]$, a condição $f(x)-2x>1$

Exponenciais

Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

3.3. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4

1.ª derivada

4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que:

1.ª derivada, 2.ª derivada e continuidade

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(0)>0$
- $f''(x)<0$, para qualquer $x\in\,]-\infty,0[$

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f

Gráfico **A**

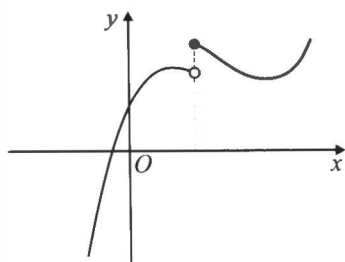



Gráfico **B**

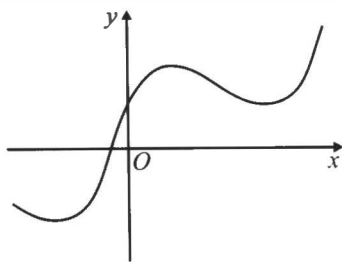
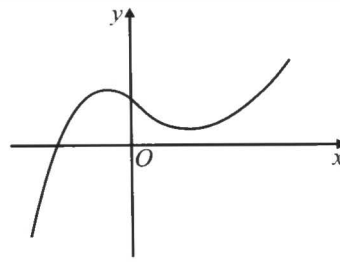



Gráfico **C**

Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f

5. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Probabilidades

Sejam A e B dois acontecimentos $(A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega)$, com $P(A)\neq 0$

Axiomática

Prove que $P(A\cup\overline{B})-1+P(B)=P(A)\times P(B|A)$

Geometria

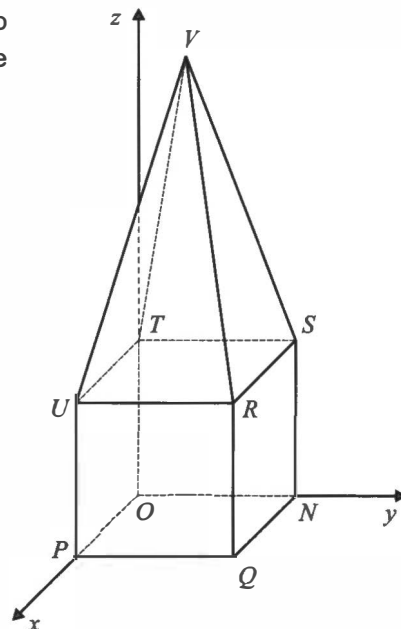
6. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTUV]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2, 2, 2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

Figura 3

Equações de retas e planos

6.1. Determine as coordenadas do ponto V

Equações de retas e planos

6.2. Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR

Produto escalar e resolução gráfica

6.3. Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Probabilidades

Combinatória

6.4. Dispõe-se de sete cores diferentes, das quais uma é branca e outra é azul, para colorir as nove faces do poliedro $[NOPQRSTUV]$. Cada face vai ser colorida com uma única cor.

Considere a experiência aleatória que consiste em colorir, ao acaso, as nove faces do poliedro, podendo cada face ser colorida por qualquer uma das sete cores.

Determine a probabilidade de, no final da experiência, o poliedro ficar com exatamente duas faces brancas, ambas triangulares, exatamente duas faces azuis, ambas quadradas, e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8.	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
3.3.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	
6.1.	5 pontos
6.2.	10 pontos
6.3.	15 pontos
6.4.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Probabilidade

Probabilidade condicionada e axiomática

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 0{,}7$
- $P(B) = 0{,}4$
- $P(A \cap B) = 0{,}2$

Qual é o valor de $P(B \mid A)$?

(A) $0{,}25$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}35$ **(D)** $0{,}4$

Combinatória

2. Nove jovens, três rapazes e seis raparigas, vão dispor-se, lado a lado, para uma fotografia.

De quantas maneiras o podem fazer, de modo que os rapazes fiquem juntos?

(A) $40\,140$ **(B)** $30\,240$ **(C)** $20\,340$ **(D)** $10\,440$

Funções

Funções exponenciais e logaritmos

3. Seja a um número real.

Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{a \ln x}$

Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto $P(2,8)$

Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f

Qual é o valor de a ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

2.ª derivada

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

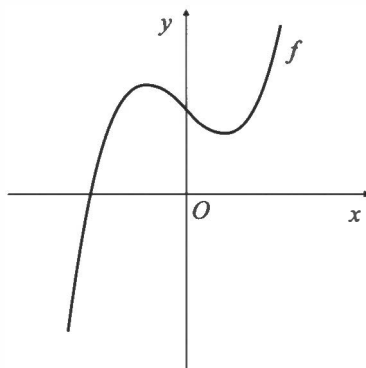
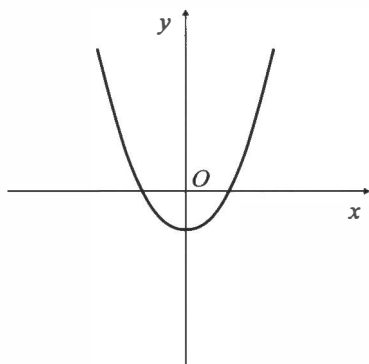
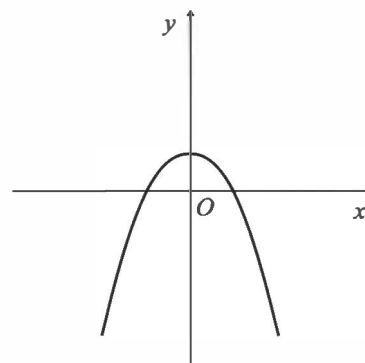
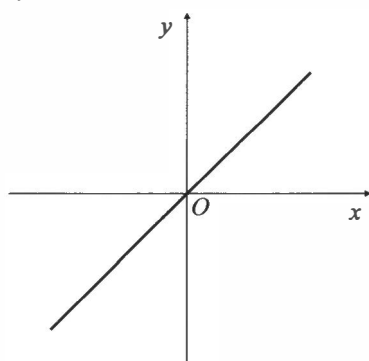
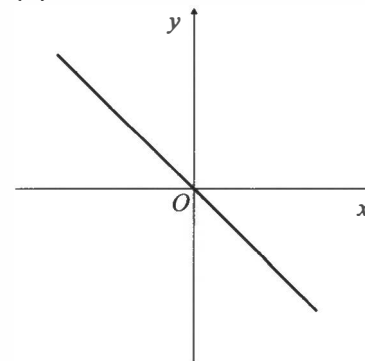
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f ?

(A)

(B)

(C)

(D)

1.ª derivada

5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que $f'(2)=6$ (f' designa a derivada de f)

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}$?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

N.os complexos

Conjuntos e condições

6. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um quadrado cujo centro coincide com a origem e em que cada lado é paralelo a um eixo.

Os vértices deste quadrado são as imagens geométricas dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

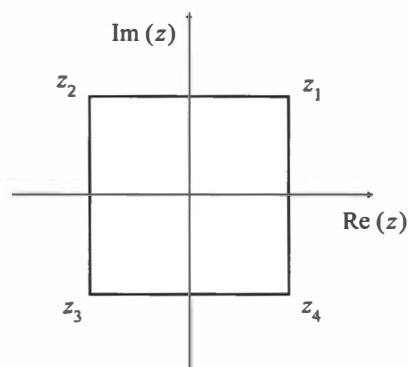
Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

(A) $|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2|$

(B) $z_1 + z_4 = 2\,\text{Re}(z_1)$

(C) $\dfrac{z_4}{i} = z_1$

(D) $-\overline{z_1} = z_2$

Figura 2

Geometria

Produto escalar

7. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) -3

(B) -2

(C) 2

(D) 3

Sucessões

Progressão geométrica

8. De uma progressão geométrica (a_n), sabe-se que o terceiro termo é igual a $\dfrac{1}{4}$ e que o sexto termo é igual a 2

Qual é o valor do vigésimo termo?

(A) 8192 **(B)** $16\,384$

(C) $32\,768$ **(D)** $65\,536$

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

N.os complexos

Potências e raízes

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = (1+i)^6$ e $z_2 = \dfrac{8i}{\text{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}$

Sabe-se que as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n

Geometria

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$

Equações de retas e planos

2.1. Considere o ponto $P(-2, 1, 3a)$, sendo a um certo número real.

Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β, sendo O a origem do referencial.

Determine o valor de a

Produto escalar

2.2. Considere o ponto $A(1, 2, 3)$

Seja B o ponto de intersecção do plano β com o eixo Ox

Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz

Determine a amplitude do ângulo BAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Lugares geométricos

2.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial, que é tangente ao plano β

Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano β

Probabilidades

3. Um saco contém nove bolas numeradas de 1 a 9, indistinguíveis ao tato.

Combinatória

3.1. Retiram-se, sucessivamente e ao acaso, três bolas do saco. As bolas são retiradas com reposição, isto é, repõe-se a primeira bola antes de se retirar a segunda e repõe-se a segunda bola antes de se retirar a terceira.

Qual é a probabilidade de o produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Distribuição binomial

3.2. Considere agora a seguinte experiência aleatória: retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco, adicionam-se os respetivos números e colocam-se novamente as bolas no saco.

Considere que esta experiência é repetida dez vezes.

Seja X o número de vezes em que a soma obtida é igual a 7

A variável aleatória X tem distribuição binomial, pelo que

$$P(X=n)={}^{10}C_n\left(\frac{1}{12}\right)^n\left(\frac{11}{12}\right)^{10-n}\quad\left(n\in\{0,1,\ldots,10\}\right)$$

Elabore uma composição em que explique:

- como se obtém o valor $\frac{1}{12}$ (probabilidade de sucesso);
- o significado de $\frac{11}{12}$, no contexto da situação descrita;
- o significado da expressão ${}^{10}C_n$, tendo em conta a sequência das dez repetições da experiência.

Funções

4. Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N=\frac{200}{1+50e^{-0,25t}}\quad(t\geq 0)$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que o instante $t=0$ corresponde ao **final** do ano 1800.

Exponenciais

4.1. Determine a taxa média de variação da função N no intervalo $[10, 20]$

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

Exponenciais e logaritmos

4.2. Mostre que $t=\ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^4$

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = x^2 e^{1-x}$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Assíntotas

5.1. Estude a função f quanto à existência de assintota horizontal.

1.ª derivada

5.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Resolução gráfica

5.3. Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
- a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
- os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a $1{,}2$
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero $[OABC]$, sendo O a origem do referencial.

Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo $[0, 5]$
- apresente o desenho do quadrilátero $[OABC]$
- indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;
- apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

Funções trigonométricas e 1.ª derivada

6. Seja a um número real.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \operatorname{sen} x$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$

Sabe-se que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Determine o valor de a

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.**	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	5 pontos
2.2.	10 pontos
2.3.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
4.	
4.1.	10 pontos
4.2.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
5.3.	15 pontos
6.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Resoluções

GRUPO I

1.

Como A e B são acontecimentos incompatíveis, $P(A \cap B) = 0$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ou seja, de acordo com os dados do enunciado, $70\% = 30\% + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 40\%$.

Resposta correta: (**B**)

2.

Como se trata de uma única ação de formação, podem selecionar-se aleatoriamente ${}^{10}C_3$ grupos de três trabalhadores, que são os casos possíveis. Como os três amigos constituem um único grupo, a probabilidade solicitada é $\frac{1}{{}^{10}C_3}$.

Resposta correta: (**C**)

3.

Como se trata de uma distribuição de probabilidades, a soma das probabilidades tem que ser 1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2a + a = 1 &\Leftrightarrow 3a = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 3a = \frac{10}{10} - \frac{2}{10} - \frac{5}{10} \\ &\Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Logo, $P(X=2) = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$

Pelo que $P(X=0) = P(X=2)$

Resposta correta: (**B**)

Funções

2.ª derivada

4.

Como f é uma função afim, $f''(x) = 0$.

Sabe-se que $h''(x) = f''(x) + (e^x) = 0 + e^x = e^x$

Das quatro representações gráficas apresentadas, a única que pode representar uma parte do gráfico da função $h''(x) = e^x$ é a opção A.

Resposta correta: (**A**)

Assíntotas

5.

Da observação da parte do gráfico da função f apresentada, e pelo facto de a reta de equação $x = 1$ ser assíntota do seu gráfico, podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

Logo:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim_{x \to 1^-} (3x)}{\lim_{x \to 1^-} f(x)} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Resposta correta: (**C**)

Logaritmos

6.

A abcissa do ponto B é -1, pois:

$$\ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = e^0 \Leftrightarrow x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Se considerarmos $[OB]$ como a base do triângulo, temos que $\overline{OB} = 1$, sendo a altura a medida correspondente à ordenada de A, isto é, 5. Portanto, a área do triângulo é:

$$\frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$$

Resposta correta: (**A**)

N.ºs complexos

Operações

7.

Um número complexo w é um imaginário puro se $\arg(w) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Logo z é um imaginário puro se:

$$\frac{\pi}{8} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{3}{8}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 1,\ \theta = \frac{5}{8}\pi$

Resposta correta: (**D**)

Conjuntos e condições

8.

Os números complexos das opções A e C não pertencem ao semiplano apresentado, porque as respetivas representações geométricas distam menos de 3 unidades da origem. Como o número complexo da opção D está sobre o eixo do imaginário, também não pertence ao semiplano apresentado.

Como $\operatorname{Re}\left(3\sqrt{3}\,cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$ temos que:

$$\operatorname{Re}\left(3\sqrt{3}\,cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) > 3$$

Resposta correta: (**B**)

GRUPO II

N.os complexos

Potências e raízes

1.

1.1.

$$w = \frac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}} = \frac{3 - i \times \left(\text{cis}\frac{\pi}{7}\right)^7}{2 - i} = \frac{3 - i \times (\text{cis}\pi)}{2 - i} = \frac{3 - i \times (-1)}{2 - i} = \frac{3 + i}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i} =$$

$$= \frac{6 + 3i + 2i + i^2}{4 - i^2} = \frac{6 + 5i - 1}{5} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

Determinemos $1 + i$ na forma trigonométrica:

- $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\text{tg}\theta = 1$ e $\theta \in 1.^{\circ}$ Q. , logo $\theta = \frac{\pi}{4}$ (argumento positivo mínimo).

Então, $w = 1 + i = \sqrt{2}\, cis\frac{\pi}{4}$

Demonstrações

1.2.

$$\left|z_1 + z_2\right|^2 = \left|cis\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2 + i\right|^2 = \left|\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2 + i\right|^2 =$$

$$= \left|\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\right) + \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1\right)i\right|^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\right)^2 + \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1\right)^2}\right)^2 =$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1 =$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) + 5 =$$

$$= 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Como se queria demonstrar.

Probabilidades

Probabilidade condicionda

2.

2.1.

Sejam os acontecimentos:

A: "Ter computador portátil"

B: "Não saber o nome do diretor"

Sabemos que: $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{1}{2}$ *e* $P(A|B) = \frac{1}{3}$ e pretendemos determinar $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ora:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Pelo que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{6 + 15 - 5}{30} = 1 - \frac{16}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

2.2.

Combinatória

Número de alunos com computador portátil (CP): $\frac{1}{5} \times 150 = 30$ e portanto 120 não têm CP.

Logo, a comissão será constituída por 4 dos 30 alunos com CP e 2 dos 120 sem CP, pelo que o número de comissões diferentes é dado por:

$$^{30}C_4 \times {}^{120}C_2 = 27405 \times 7140 = 195671700$$

Probabilidades

Probabilidades

3.

Nesta experiência aleatória, todos os acontecimentos elementares são equiprováveis, pelo que se poderá utilizar a regra de Laplace, segundo a qual, para acontecimentos equiprováveis a probabilidade é calculada através do quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.

Nesta experiência, retirar simultaneamente duas bolas do saco é o mesmo que retirar, sucessivamente, duas bolas do saco, sem reposição.

Tratando-se de um saco que contém 18 bolas indistinguíveis ao tato, qualquer uma das 18 bolas poderá sair com qualquer uma das 17 restantes. Assim, o número de casos possíveis será igual a 18×17.

Para que possamos obter um par de bolas da mesma cor, teremos que retirar 2 bolas azuis ou 2 bolas vermelhas. Para saírem 2 bolas azuis, teremos que tirar qualquer uma das 12 bolas azuis com qualquer uma das 11 restantes da mesma cor. Para saírem 2 bolas vermelhas, teremos que tirar qualquer uma das 6 bolas vermelhas com qualquer uma das 5 restantes da mesma cor.

Assim, o número de casos favoráveis à saída de duas bolas da mesma cor será igual a $12 \times 11 + 6 \times 5$.

Conclui-se, então, que a probabilidade de as duas bolas extraídas serem da mesma cor é igual a $\dfrac{12 \times 11 + 6 \times 5}{18 \times 17}$.

Funções

Logaritmos

4.

4.1.

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1) = 8 \times 3\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) =$$

$$= 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) = 16\log_4(3t+1)$$

Para qualquer $t \in [0, 5]$, como se queria demonstrar.

4.2.

Logaritmos

$2400 = 24$ centenas

$$N(t) = 24 \Leftrightarrow 16\log_4(3t+1) = 24 \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{24}{16} \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4(3t+1) = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3t+1 = \sqrt{64} \Leftrightarrow 3t = 8-1 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3} \Leftrightarrow$$

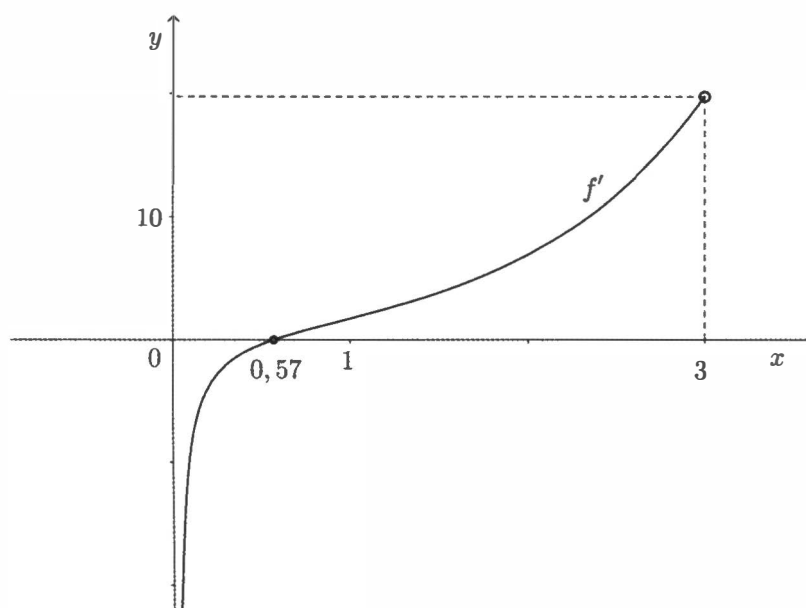
$$\Leftrightarrow t = 2 + \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$ de hora corresponde a 20 minutos.

Pelo que, para vender 2400 bilhetes, foram necessárias $2h$ e 20 minutos.

5.

Resolução gráfica

Usando as capacidades gráficas da calculadora, obtemos o gráfico de $f'(x)$

Da análise do gráfico podemos tirar as seguintes conclusões:

	0		0,57		3
$f'(x)$	n.d.	–	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	↘	mín.	↗	n.d.

A função f é decrescente em $]0; 0{,}57[$ e é crescente em $]0{,}57; 3[$

f admite um mínimo absoluto para $x \approx 0{,}57$.

Funções

Assíntotas

6.

6.1.

A existir uma assíntota oblíqua, esta terá que verificar-se quando $x \to -\infty$, uma vez que o domínio da função é $\left]-\infty, 2\pi\right]$. Para que a reta de equação $y = ax + b$ seja assíntota do gráfico de f, tem que verificar-se o seguinte:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (ax + b) \right) = 0$$

Como:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (ax + b) \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(ax + b + e^x - ax - b \right) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Como se queria demonstrar.

Continuidade

6.2.

Para que a função f seja contínua em $x = 0$, tem que verificar-se o seguinte:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(ax + b + e^x \right) = a \times 0 + b + e^0 = b + 1 \qquad (1)$$

$$f(0) = a \times 0 + b + e^0 = b + 1 \qquad (2)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} - \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 1 - \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}_{\textit{Indeterminação do tipo } \frac{0}{0}}$$

Fazendo a mudança de variável: $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$ e como $x \to 0^+$ então, $y \to 0^+$.

Assim,

$$1 - \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 1 - \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(y)}{\frac{y}{2}} =$$

$$= 1 - 2 \underbrace{\lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\textit{limite notável}} = 1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = 1 \qquad (3)$$

De $(1), (2)$ e (3) tem-se que:

$b + 1 = -1 \Leftrightarrow b = -2$

7.

7.1.

O triângulo $[OAB]$ é retângulo em B porque o ângulo OAB é inscrito numa semicircunferência.

O perímetro do triângulo é dado por: $P = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB}$.

Ora:

$\overline{OA} = 2$

$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\cos\alpha$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\operatorname{sen}\alpha$

Assim:

$f(\alpha) = 2 + 2\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$

Como se queria demonstrar.

7.2.

Para determinar o maximizante da função, calcula-se o zero da função derivada.

$f'(\alpha) = 2(-\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$, para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pelo que:

$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(-\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

Atendendo a que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que, necessariamente, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	n.d.	+	0	–	n.d.
$f(\alpha)$	n.d.	↗	máx.	↘	n.d.

Logo, o valor de α, para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo, é $\frac{\pi}{4}$.

FIM

GRUPO I

1.

Probabilidades

Como só existem bolas de dois tipos na caixa e a probabilidade de sair bola azul é $\frac{1}{2}$, existem tantas bolas roxas quantas as azuis, que são 8.

Resposta correta: (**C**)

2.

Combinatória

Escolhendo três das cinco posições para colocar os algarismos 5, temos ${}^5C_3$ hipóteses.

Para as restantes duas posições podemos usar 4 algarismos, podendo fazê-lo com repetição, ou seja, 4^2 hipóteses. Pelo que existem ${}^5C_3 \times 4^2$ números nas condições do enunciado.

Resposta correta: (**B**)

3.

Triângulo de Pascal

Na linha do Triângulo de Pascal em causa, apenas os números reproduzidos no enunciado são inferiores ou iguais a 105, pelo que nenhum dos restantes poderia ser parcela de uma soma com resultado 105. Dos números apresentados também não é possível somar dois deles com o resultado 105, pelo que nenhum par de números desta linha do Triângulo de Pascal tem soma 105. Logo, o valor da probabilidade solicitada é 0 (zero).

Resposta correta: (**D**)

4.

Limites

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-2x\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) - \lim_{x\to+\infty}(2x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Como a função h é par, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x)$

Ou seja, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

Resposta correta: (**A**)

Limite segundo Heine

5.

Como

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0^+ ,$$

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\ln(u_n) \right) = \ln(0^+) = -\infty$$

Resposta correta: (**D**)

1.ª derivada

6.

Da observação do gráfico da função f', função derivada de f, conclui-se que no intervalo $]0, a[$ a função derivada é positiva. Logo, a função é crescente nesse intervalo.

Resposta correta: (**C**)

N.os complexos

Potências e raízes

7.

Como o vértice A é a representação geométrica de um número complexo de módulo 1, o mesmo acontecerá com o número complexo representado geometricamente pelo vértice D.
Como os argumentos dos números complexos representados por dois vértices consecutivos do pentágono diferem de $\frac{2\pi}{5}$, o argumento do número complexo representado pelo vértice D será $3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$.

Resposta correta: (**B**)

Potências e raízes

8.

Como

$$w = \rho\, cis\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad w^6 = \rho^6\, cis\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \rho^6\, cis\left(\frac{18\pi}{2}\right) = \rho^6\, cis(9\pi) = \rho^6\, cis\,\pi$$

Logo, a representação geométrica de w^6 pertence ao eixo real.

Resposta correta: (**A**)

N.os complexos

GRUPO II

1.

1.1.

Potências e raízes

$$z_1^{\,4} = \sqrt{2}^{\,4}\,cis\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = 4cis(\pi) = -4$$

$$w = \frac{-4+4i}{i} = \frac{(-4+4i)\times i}{i \times i} = \frac{-4i+4i^2}{i^2} = \frac{-4-4i}{-1} = 4+4i$$

Determinemos $4 + 4i$ na forma trigonométrica:

- $\rho = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = 1$ e $\theta \in 1.^{\text{o}}$ Q. , logo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (argumento positivo mínimo).

Então, $w = 4 + 4\,i = 4\sqrt{2}\;cis\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

1.2.

Conjuntos e condições

$$z_1 = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}i = 1 + i$$

Sejam os pontos A e B as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2.

Temos então que as suas coordenadas são: $A(1,1)$ e $B(3,0)$

O raio da circunferência é $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Assim, a condição pedida é $|z - 3| = \sqrt{5}$

Probabilidades

Distribuições de probabilidades

2.

2.1.

A variável aleatória X, tal como está definida, toma os valores $-3, -2, -1, 0$ e 1.

$$P(X=-3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=-2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=-1) = \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$P(X=1) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável X é:

x_i	-3	-2	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

Probabilidade condicionada

2.2.

$P(L|J)$ representa a probabilidade de o ponto Q pertencer ao 3.º quadrante sabendo que o número saído no dado A é negativo.

Ora, para que o ponto Q pertença ao 3.º quadrante, é necessário que tenha abcissa e ordenada negativas. Já sabemos que a sua abcissa é negativa, visto que o número saído no dado A é negativo. Então, basta agora que a sua ordenada seja também negativa. Assim sendo, para que isso aconteça, existe apenas um caso favorável entre seis possíveis: a saída da face -1 no dado B. Como todos os acontecimentos são equiprováveis, então, pela regra de Laplace, vem que $P(L|J) = \frac{1}{6}$.

Axiomática

3.

$$\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A}|B) = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - (P(B) - P(A \cap B))}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A)}{P(B)},$$

Como se queria demonstrar.

Funções

Assíntotas

4.

4.1.

Atendendo ao domínio da função, a existir assíntota oblíqua, ela verificar-se-á quando $x \to +\infty$.

Determinemos, se existir, o seu declive:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{5}x}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

E a sua ordenada na origem, se existir:

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x \right) = \lim_{x \to +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Como b não é um número real, então o gráfico da função não admite assíntotas oblíquas.

1.ª derivada

4.2.

Estudemos, no intervalo $]2, +\infty[$, a função derivada de f.

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 5$$

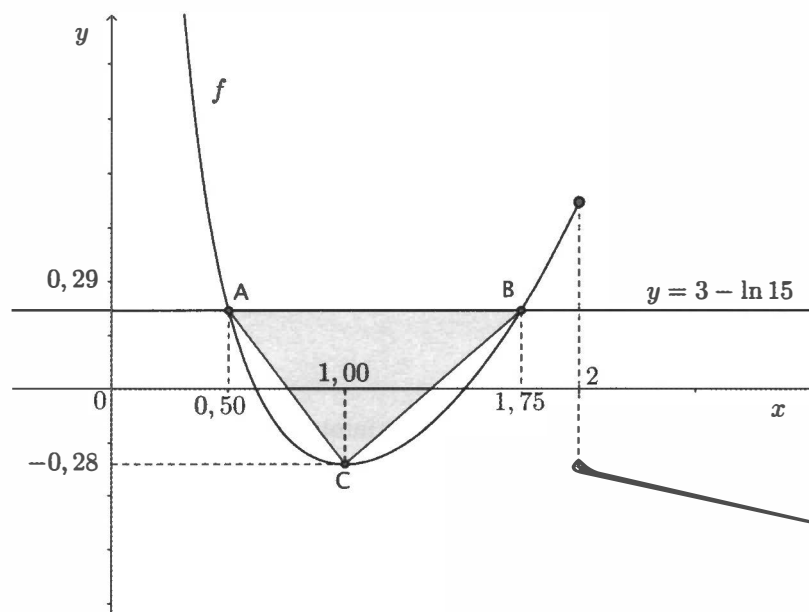
	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n.d.	↘	mín.	↗

Estudado o comportamento da função, podemos concluir que admite um mínimo para $x = 5$, que é $f(5) = 1 - \ln 5$, pelo que f admite no intervalo $]2, +\infty[$ um extremo relativo, como se queria demonstrar.

Resolução gráfica

4.3.

$f(15) = 3 - \ln 15$

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, representemos graficamente a função f e a reta de equação $y = 3 - \ln 15$.

Determinando a intersecção da reta com o gráfico da função, obtemos as seguintes coordenadas de A e de B : $A(0{,}50 ; 0{,}29)$ e $B(1{,}75 ; 0{,}29)$.

Determinando o mínimo da função no intervalo em causa, obtemos as coordenadas do ponto $C(1{,}00 ; -0{,}28)$.

Temos então que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$\frac{(1{,}75 - 0{,}50) \times (3 - \ln(15) + 0{,}28)}{2} \approx 0{,}4$$

Funções

5.

5.1.

Teorema de Bolzano

f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de soma e composição de funções contínuas; logo, é também contínua no intervalo $[-2,-1]$.

$$f(-2) = 2 + e^{2\times(-8)-1} \approx 2{,}000$$

$$f(-1) = 1 + e^{2\times(-1)-1} \approx 1{,}050$$

Ora, $f(-1) < 1{,}5 < f(-2)$; logo, pelo teorema de Bolzano, há-de existir pelo menos um valor $x_1 \in]-2,-1[$ tal que $f(x_1) = 1{,}5$. Ou seja, a equação $f(x) = 1{,}5$ tem pelo menos uma solução nesse intervalo.

5.2.

1.ª derivada

$$f'(x) = -1 + 6x^2 e^{2x^3-1}$$

$$f'(0) = -1 + 0 \times e^{-1} = -1$$

$$f(0) = 0 + e^{2\times 0-1} = e^{-1}$$

A reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero tem declive $f'(0) = -1$ e contém o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

Logo, a sua equação reduzida é $y = -x + \frac{1}{e}$.

Funções

6.

6.1.

Funções trigonométricas

A altura do combustível no reservatório é dada por $\overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC}$ para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e por

$\overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OC}$ para $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ temos que:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow 3\cos\theta = \overline{OC}$$

$$\overline{AC} = 3 - \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

Para $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ temos que:

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow 3\cos(\pi - \theta) = \overline{OC} \Leftrightarrow -3\cos\theta = \overline{OC}$$

$$\overline{AC} = 3 + \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

Logo, em qualquer dos casos, a altura do combustível no reservatório é dada pela expressão $3 - 3\cos\theta$, ou seja, $h(\theta) = 3 - 3\cos\theta$, como se queria demonstrar.

Funções trigonométricas

6.2.

$$h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3\cos\theta = 3 \Leftrightarrow -3\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0$$

Como $\theta \in \left]0, \pi\right[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

Quando a altura do combustível no depósito é 3, o ângulo AOB é $\frac{\pi}{2}$. Portanto, $C \equiv O$, e o depósito está a metade da sua capacidade.

FIM

GRUPO I

1.

Probabilidades

Combinatória

Os livros de Matemática podem estar arrumados juntos de $3!$ maneiras diferentes em cada uma das duas pontas da prateleira. Os restantes cinco livros podem estar arrumados de $5!$ maneiras diferentes. Assim, o número de maneiras diferentes de arrumar os oito livros, de modo que os livros de Matemática fiquem todos juntos numa das pontas, é: $2 \times 3! \times 5! = 1440$.

Resposta correta: (**D**)

2.

Probabilidades

Como $P(\overline{B}) = 0{,}3$, então $P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}8$$

Resposta correta: (**D**)

3.

Distribuições de probabilidades

O número mínimo de perfumes de homens colocados na montra pode ser zero e o número máximo pode ser 3. Assim, os valores da variável X podem ser 0, 1, 2 e 3.

$$P(X = 0) = P(\textit{sair 6 perfumes de mulher}) = \frac{{}^{7}C_6}{{}^{10}C_6} = \frac{7}{{}^{10}C_6}$$

$$P(X = 1) = P(\textit{sair 1 perfume de homem e 5 de mulher}) = \frac{{}^{3}C_1 \times {}^{7}C_5}{{}^{10}C_6} = \frac{63}{{}^{10}C_6}$$

$$P(X = 2) = P(\textit{sair 2 perfumes de homem e 4 de mulher}) = \frac{{}^{3}C_2 \times {}^{7}C_4}{{}^{10}C_6} = \frac{105}{{}^{10}C_6}$$

$$P(X = 3) = P(\textit{sair 3 perfumes de homem e 3 de mulher}) = \frac{{}^{3}C_3 \times {}^{7}C_3}{{}^{10}C_6} = \frac{35}{{}^{10}C_6}$$

Resposta correta: (**A**)

Funções

Logaritmos

4.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(-3x) = 2 \Leftrightarrow -3x = e^2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}e^2$$

Resposta correta: (**C**)

Limites

5.

Como $y = -4$ é uma assíntota do gráfico de h, pode-se concluir que:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -4$$

Assim:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{\lim_{x \to +\infty} h(x)} = \frac{\ln\left(0^+\right)}{-4} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

Resposta correta: (**B**)

1.ª derivada

6.

Da observação de parte do gráfico da função derivada, f', de uma função f, pode-se construir o seguinte quadro, que relaciona o sinal da função derivada com a monotonia da função.

	$-\infty$	a		b	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	máx.	↘	mín.	↗

Assim, o único gráfico que respeita esta variação de monotonia é o da opção A.

Resposta correta: (**A**)

N.ºs complexos

Conjuntos e condições

7.

$$i \times \left(z + \bar{z}\right) = 0 \Leftrightarrow i \times \left(x + yi + x - yi\right) = 0 \Leftrightarrow 2xi = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Logo, o conjunto A corresponde ao eixo imaginário.

Resposta correta: (**B**)

Operações

8.

Sendo $z = \rho cis(\theta)$ temos que:

$$-i \times z = cis\left(\frac{3\pi}{2}\right) \times \rho cis(\theta) = \rho cis\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Assim, o número complexo pedido terá o mesmo módulo de z e o argumento será adicionado de $\frac{3\pi}{2}$ radianos.

O único ponto que poderá representar este número complexo é o ponto T.

Resposta correta: (**D**)

GRUPO II

N.os complexos

1.

1.1.

Potências e raizes

Determinemos $-1 - i$ na forma trigonométrica:

- $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$ e $\theta \in 3.^o$ Q. , logo $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ (argumento positivo mínimo).

Assim, $-1 - i = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$$z = \frac{(-1-i)^8}{\left(cis\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \times cis\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\, cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^8}{\left(cis\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \times cis\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^8 \left(cis\left(\frac{5\pi}{4} \times 8\right)\right)}{cis\left(\frac{\pi}{8} \times 2\right)} \times cis\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{16\, cis(10\pi)}{cis\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times cis\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{16\, cis(0)}{cis\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right) \times cis\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 16\, cis\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 16\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Como se queria demonstrar.

Potências e raizes

1.2.

As raízes quartas de $z = 16\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ são:

$$z_k = \sqrt[4]{16}\,cis\left(\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{4}\right), \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$z_0 = 2\,cis\left(\frac{\pi}{16}\right); \quad z_1 = 2\,cis\left(\frac{9\pi}{16}\right); \quad z_2 = 2\,cis\left(\frac{17\pi}{16}\right); \quad z_3 = 2\,cis\left(\frac{25\pi}{16}\right)$$

As 4 raízes quartas de z têm como imagens geométricas os vértices de um quadrado centrado na origem do referencial. A diagonal desse quadrado mede 4 unidades.

Assim, se considerarmos l o lado do quadrado, tem-se:

$$l^2 + l^2 = 4^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 16 \Leftrightarrow l^2 = 8 \Leftrightarrow l = \sqrt{8}$$

Logo, a área do quadrado: $A = l^2 = 8$

Probabilidades

Combinatória

2.

2.1.

Este problema pode-se resolver utilizando o acontecimento contrário, isto é, o número pedido é igual ao número total de grupos de 5 alunos que se podem formar, ao qual vamos subtrair o número de grupos formados só por rapazes e ainda o número de grupos formados só por raparigas. Assim:

Número total de grupos possíveis de formar: ${}^{27}C_5$

Número total de grupos formados só por rapazes: ${}^{17}C_5$

Número total de grupos formados só por raparigas: ${}^{10}C_5$

Logo, o número pedido é: ${}^{27}C_5 - {}^{17}C_5 - {}^{10}C_5 = 74290$

2.2.

Probabilidade condicionada

$P(A|B)$ é a probabilidade de, dos 5 alunos escolhidos, 2 serem rapazes e 3 serem raparigas, sabendo que a Maria e o Manuel foram escolhidos.

A probabilidade é determinada utilizando a regra de Laplace, segundo a qual, para acontecimentos equiprováveis a probabilidade é calculada através do quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Como o Manuel e a Maria já foram escolhidos, só serão escolhidos mais 3 alunos de entre os 25 que restam, sendo um rapaz e duas raparigas.

Assim, o número de casos possíveis é ${}^{25}C_3$, o número de formas diferentes de escolher 3 alunos de um grupo de 25.

O número de casos favoráveis é dado pelo produto entre o número de formas de escolher um rapaz entre os 16 que sobram depois de ter sido escolhido o Manuel e o número de formas de escolher duas raparigas entre as 9 que sobram depois de ter sido escolhida a Maria.

Assim, o número de casos favoráveis é: ${}^{16}C_1 \times {}^{9}C_2 = 16 \times {}^{9}C_2$

e a probabilidade é dada por: $\dfrac{16 \times {}^{9}C_2}{{}^{25}C_3}$.

3.

Probabilidade condicionada

A probabilidade de pelo menos uma das amigas telefonar à sua mãe é dada por $P(A \cup B)$.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e como A e B são independentes:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Logo,

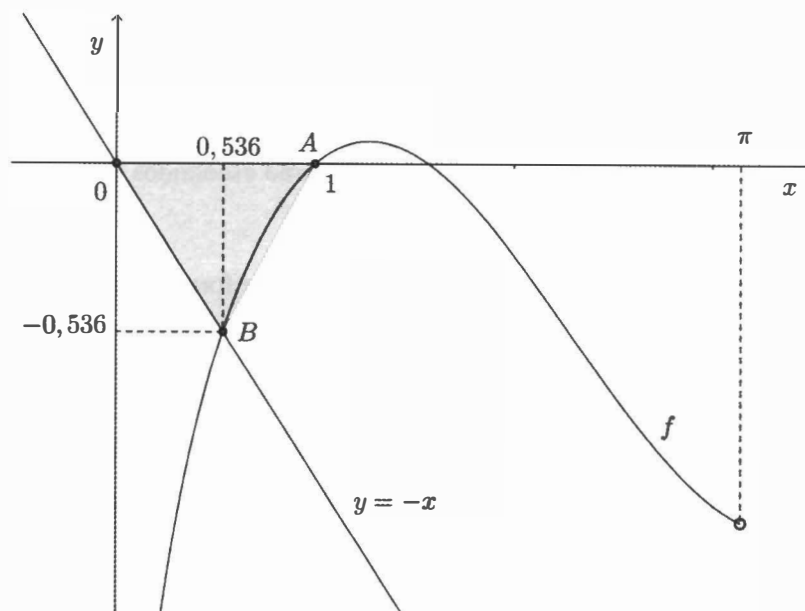
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}94$, ou seja,

$P(A \cup B) = 94\%$

Funções

Resolução gráfica

4.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, representemos graficamente a função f e a reta de equação $y = -x$ e determinemos as coordenadas dos pontos A e B.

Como $A(0\,,1)$ e $B(0{,}536\,;-0{,}536)$ a área do triângulo é dada por:

$$\frac{b \times a}{2} = \frac{1 \times 0{,}536}{2} = 0{,}268 \approx 0{,}27$$

Assíntotas

5.

Para fazer esta demonstração, vamos determinar a assíntota oblíqua do gráfico da função g.

Como $y = 1$ é a única assíntota do gráfico de f, pode-se concluir que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) + x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + 1 \right) = \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - mx \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + x - x \right) = 1$$

Logo, a reta de equação $y = x + 1$ é a assíntota oblíqua do gráfico de g e é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, pois tem o mesmo declive $(m = 1)$.

Funções

Continuidade

6.

6.1.

Para que a função h seja contínua para $x = 0$, tem que se verificar:

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$$

$$h(0) = \ln\left(0^2 + 1\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 + 1\right) = \ln\left(0^2 + 1\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{2x} - e^x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x\left(e^x - 1\right)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(e^x \times \frac{\left(e^x - 1\right)}{x}\right) = e^0 \times 1 = 1$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) \neq \lim_{x\to 0^+} h(x)$$

Pode-se concluir que a função h não é contínua para $x = 0$.

Exponenciais e logaritmos

6.2.

$$h(x) > h(-4) \wedge x \in \left]-\infty, 0\right] \Leftrightarrow \ln\left(x^2 + 1\right) > \ln\left((-4)^2 + 1\right) \wedge x \in \left]-\infty, 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2 + 1\right) > \ln(17) \wedge x \in \left]-\infty, 0\right] \Leftrightarrow x^2 + 1 > 17 \wedge \underbrace{x^2 + 1 > 0}_{\textit{Condição universal}} \wedge x \in \left]-\infty, 0\right] \Leftrightarrow$$

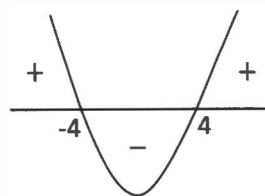
$$\Leftrightarrow x^2 - 16 > 0 \wedge x \in \left]-\infty, 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\left]-\infty, -4\right] \cup \left[4, +\infty\right[\right) \wedge x \in \left]-\infty, 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -4\right]$$

Conjunto solução: $\left]-\infty, -4\right]$.

Funções

Funções trigonométricas

7.

7.1.

A hora pedida, três da tarde, corresponde a $t = 15$.

Assim,

$$P(15) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 15\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8 = 2 \times 0 + 8 = 8$$

A profundidade da água da marina às três horas da tarde desse dia é de 8 metros.

1.ª derivada

7.2.

$$P'(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8\right)' = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) \times \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Calculando os zeros da função derivada:

$$-\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0, 24]$ os zeros da função derivada são: 0, 6, 12, 18 e 24

Determinando as imagens destes zeros na função P,

$$P(0) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0\right) + 8 = 10$$

$$P(6) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) + 8 = 6$$

$$P(12) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 12\right) + 8 = 10$$

$$P(18) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 18\right) + 8 = 6$$

$$P(24) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 24\right) + 8 = 10$$

pode-se construir o seguinte quadro, que relaciona o sinal da função derivada com a monotonia da função:

	0		6		12		18		24
$P'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$P(t)$	10	↘	6 mín.	↗	10 máx.	↘	6 mín.	↗	10

A profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia, é de 6 metros.

FIM

GRUPO I

Probabilidades

Axiomática e probabilidade condicionada

1.

Como os acontecimentos são independentes a probabilidade de se verificar um acontecimento não se altera pela ocorrência, ou não, do outro, pelo que:

$P(B|A) = P(B)$

Resposta correta: (**D**)

Combinatória

2.

Como no código do autorrádio só podem existir exatamente dois algarismos iguais a 7, existem ${}^4C_2$ formas diferentes de colocar esses dois algarismos.

Para as outras duas posições restam 9 algarismos que se podem repetir, ou seja, 9×9 hipóteses diferentes.

Assim, o número de códigos diferentes é dado por: ${}^4C_2 \times 9 \times 9 = 6 \times 81 = 486$

Resposta correta: (**A**)

Funções

Assíntotas

3.

Por definição de assíntota oblíqua, tem-se que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - (2x - 4) \right) = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2x + 4 \right) = 0$

Resposta correta: (**C**)

Teorema de Bolzano

4.

A função é contínua em todo o seu domínio exceto para $x = 5$, pois os limites laterais são diferentes. Fica assim excluída como hipótese de resposta a opção C.

Analisando as imagens dos extremos dos intervalos das restantes opções, verifica-se que somente no intervalo $]1, 4[$ o produto dessas imagens é negativo.

Ou seja, $f(1) = -7$, $f(4) = 7$ e $f(1) \times f(4) < 0$, pelo que f admite pelo menos um zero no intervalo $]1, 4[$.

Resposta correta: (**B**)

Limites

5.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\times 1\right)^2=\frac{1}{4}$$

Resposta correta: (**C**)

1.ª derivada

6.

Estudando, por observação do gráfico de f, o sinal de $f'(0)$, $f'(6)$ e $f'(-3)$, tem-se que $f'(0)<0$, $f'(6)>0$ e $f'(-3)>0$.

A afirmação verdadeira é $f'(0)\times f'(6)<0$.

Resposta correta: (**D**)

N.^{os} complexos

Operações

7.

$$i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}=\left(i^4\right)^n+\left(i^4\right)^n\times i+\left(i^4\right)^n\times i^2=1+i+(-1)=i.$$

O módulo do número complexo i é 1 e o seu argumento é $\frac{\pi}{2}$; logo, o número complexo que lhe corresponde é z_2.

Resposta correta: (**B**)

Conjuntos e condições

8.

Como A e B são representações geométricas de raízes de índice 5 do número complexo $32\,cis\frac{\pi}{2}$, então o raio do sector circular é $\sqrt[5]{32}=2$ e a amplitude do ângulo compreendido entre duas raízes consecutivas de índice 5 de um número complexo é $\frac{2\pi}{5}$.

Assim, a área do sector circular é: $\dfrac{2^2\times\frac{2\pi}{5}}{2}=\dfrac{4\pi}{5}$.

Resposta correta: (**B**)

N.ºs complexos

GRUPO II

1.

1.1.

Equações

Se z_1 é raiz do polinómio, então, aplicando a regra de Ruffini, vem:

	1	-1	16	-16
1		1	0	16
	1	0	16	0

Assim, $z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z-1)(z^2+16)$

As restantes raízes do polinómio poderão obter-se através da resolução da seguinte equação:

$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16}\,i \Leftrightarrow z = \pm 4i$

Na forma trigonométrica:

$$z = 4cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) \lor z = 4cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

1.2.

Operações

$$z_2 = 5i = 5cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_2 \times z_3 = 5cis\left(\frac{\pi}{2}\right) \times cis\left(\frac{n\pi}{40}\right) = 5cis\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40}\right) = 5cis\left(\frac{20\pi + n\pi}{40}\right)$$

Para $z_2 \times z_3$ pertencer ao terceiro quadrante e à bissetriz dos quadrantes ímpares, tem que se verificar:

$$\frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 20\pi + n\pi = 50\pi + 80k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n\pi = 30\pi + 80k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{30\pi + 80k\pi}{\pi},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 30 + 80k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, vem $n = 30$.

Probabilidades

2.

2.1.

Distribuição binomial

Seja X a variável aleatória correspondente ao número de jovens que pagam com multibanco.

Recorrendo ao modelo da distribuição binomial temos que:

$$P(X = 6) = {}^{9}C_{6} \times 0{,}6^{6} \times 0{,}4^{3} \approx 0{,}25$$

Probabilidade condicionada

2.2.

Sejam os acontecimentos:

B: "o destino da viagem é Berlim"

A: "o passageiro segue viagem"

Como $P(\overline{A} \mid B) = 0{,}05$ então $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}05 \times 0{,}3 = 0{,}015$

Como $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}92$ então $P(\overline{B} \cap A) = 0{,}92 \times 0{,}7 = 0{,}644$

Esquematizando na tabela seguinte os resultados fornecidos e os obtidos, temos:

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,285	0,015	0,3
$\overline{B}$	0,644	0,056	0,7
Total	0,929	0,071	1

Assim,

$$P(\overline{A}) = P(B \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0{,}015 + 0{,}056 = 0{,}071$$

Probabilidades

3.

Axiomática

$$P(B|A) \geq 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \geq \frac{P(A) - 1 + P(B)}{P(A)} \qquad (1)$$

Como $P(A) > 0$, então de (1) vem que:

$$P(B \cap A) \geq P(A) - 1 + P(B) \Leftrightarrow 1 \geq P(A) + P(B) - P(B \cap A)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq P(B \cup A)$$

$$\Leftrightarrow P(B \cup A) \leq 1$$

o que se verifica ser uma proposição verdadeira, na axiomática de Kolmogorov, quaisquer que sejam os acontecimentos A e B nas condições dadas. Fica assim provada a condição inicial.

4.

Comecemos por calcular $T'(t)$

$$T'(t) = 0{,}2t \times e^{-0{,}15t} + 0{,}1t^2 \times \left(-0{,}15e^{-0{,}15t}\right) =$$

$$= 0{,}2t \times e^{-0{,}15t} - 0{,}015t^2 \times e^{-0{,}15t} =$$

$$= e^{-0{,}15t}\left(0{,}2t - 0{,}015t^2\right)$$

Calculando os zeros da derivada:

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}15t}\left(0{,}2t - 0{,}015t^2\right) = 0 \Leftrightarrow 0{,}2t - 0{,}015t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(0{,}2 - 0{,}015t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 0{,}2 - 0{,}015t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{-0{,}2}{-0{,}015} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{40}{3}$$

t	0		$\frac{40}{3}$		20
$T'(t)$		+	0	–	
$T(t)$		↗	máx.	↘	

$$\frac{40}{3} = \frac{39}{3} + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 60 = 20$$

A temperatura máxima foi atingida às 13 horas e 20 minutos.

1.ª derivada e assíntotas

5.

5.1.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x-1}\right) = \frac{3}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \frac{2}{+\infty} + 0 = 0$$

Assim, verificamos que $y = 0$ é assíntota do gráfico de f .

Como $e > 1$, basta determinar $f'(x)$ para $x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(e) = \frac{-1-\ln e}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e será $m = -\frac{2}{e^2}$.

Como o ponto de tangência pertence ao gráfico de f , vem: $f(e) = \frac{2+\ln e}{e} = \frac{3}{e}$

Assim, substituindo na equação da reta $y = -\frac{2}{e^2}x + b$, as coordenadas do ponto $\left(e\ ,\ \frac{3}{e}\right)$, temos:

$$\frac{3}{e} = -\frac{2}{e^2}\times e + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{e}$$

A equação da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa e será: $y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{5}{e}$

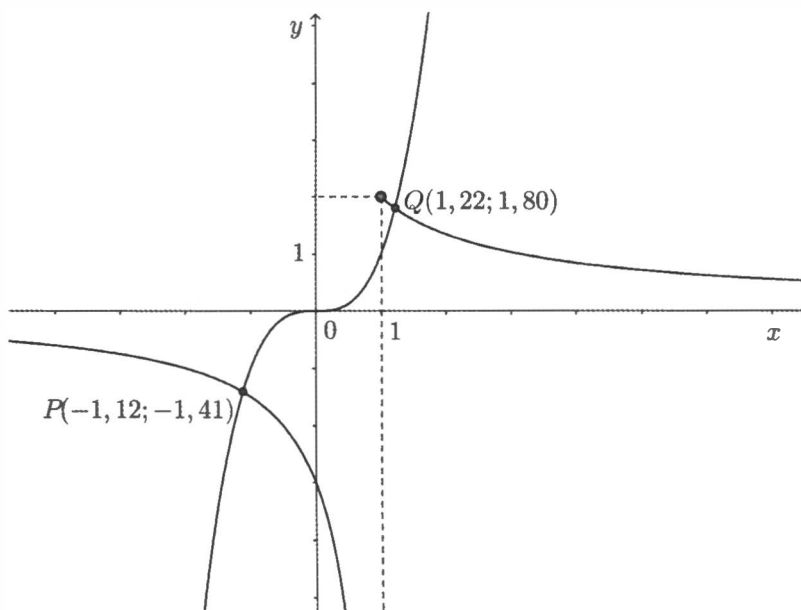
As coordenadas do ponto P serão determinadas a partir da seguinte condição:

$$-\frac{2}{e^2}x + \frac{5}{e} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{e^2}x = -\frac{5}{e} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{e}\times\left(-\frac{e^2}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}e$$

Assim, as coordenadas do ponto P são: $\left(\frac{5}{2}e\ ;0\right)$

5.2.

Para determinar os pontos cujas ordenadas, no gráfico de f , são o cubo das abcissas, temos que resolver a equação $f(x) = x^3$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, representamos, numa janela adequada, as curvas correspondentes à função f e a $y = x^3$.

As soluções da equação $f(x) = x^3$ são, aproximadamente, $-1{,}12$ e $1{,}22$.

As coordenadas dos pontos são: $P(-1{,}12\,;-1{,}41)$ e $Q(1{,}22\,;1{,}80)$.

Funcões trigonométricas

6.

6.1.

A área do trapézio é determinada a partir da seguinte fórmula:

$$\acute{A}rea = \frac{\overline{AD} + \overline{CB}}{2} \times \overline{DC}$$

Como a abcissa do ponto D é $-\frac{\pi}{6}$, então temos que $\overline{CB} = \frac{\pi}{6}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x)=0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, temos que $x = \frac{\pi}{4}$

Assim, $\overline{AD} = \left|\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{5\pi}{12}$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

Logo, $\overline{CD} = 2$

A área do trapézio será:

$$\acute{A}rea = \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6}}{2} \times 2 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}\ u.a.$$

Funcões trigonométricas e derivadas

6.2.

Determinemos a expressão da primeira e segunda derivada da função f:

$$f'(x) = (4\cos(2x))' = \left(4 \times (2x)' \times (-\text{sen}(2x))\right) = \left(4 \times 2 \times (-\text{sen}(2x))\right) = -8\,\text{sen}(2x)$$

$$f''(x) = (-8\,\text{sen}(2x))' = \left(-8 \times (2x)' \times (\cos(2x))\right) = \left(-8 \times 2 \times (\cos(2x))\right) = -16\cos(2x)$$

Assim,

$$f(x) + f'(x) + f''(x) = 4\cos(2x) - 8\,\text{sen}(2x) - 16\cos(2x) =$$

$$= -12\cos(2x) - 8\,\text{sen}(2x) =$$

$$= -4(3\cos(2x) + 2\,\text{sen}(2x))$$

Como se queria demonstrar.

Continuidade e 2.ª derivada

7.

O gráfico III representa a função f.

O gráfico I não pode representar a função f porque não tem os sentidos de concavidade de acordo com os determinados na tabela abaixo.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \times (x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \vee x^2 - 5x + 4 = 0$

Como $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então $x = 1 \vee x = 4$

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	∪		∩		∪

O gráfico II não pode representar a função f porque $f(1) \times f(4) < 0$, o que contradiz um dos pressupostos do enunciado.

O gráfico IV não pode representar a função f porque apresenta um ponto de descontinuidade, o que não se pode verificar pelo facto de f'' ser finita em todos os pontos do seu domínio.

FIM

GRUPO I

1.

Se se retiram, ao acaso e simultaneamente, 4 caixas do lote constituído por 30 caixas, o número de casos possíveis é dado por ${}^{30}C_4$. O número de casos em que as caixas retiradas são todas do medicamento Y, casos favoráveis, é ${}^{20}C_4$. Pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{20}C_4}{{}^{30}C_4}$.

Resposta correta: (**B**)

2.

Atendendo aos dados fornecidos, temos que:

$$P(X \leq 1) = 3P(X = 5) \Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) = 3P(X = 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a + a = 3 \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

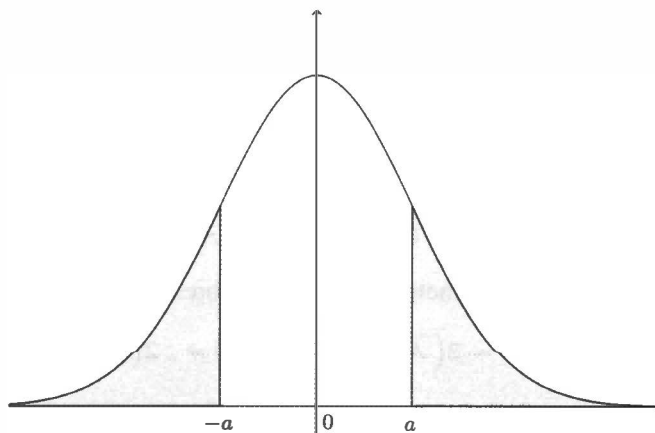
Como $2a + a + b + b + b + \frac{1}{10} = 1$, vem que:

$$2 \times \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + 3b + \frac{1}{10} = 1 \Leftrightarrow 3b = 1 - \frac{4}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{6}{10} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

Resposta correta: (**D**)

3.

A distribuição de probabilidades de X, por ser normal, é simétrica em relação ao seu valor médio, que é zero. Então, $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$.

Resposta correta: (**B**)

Funções

2.ª derivada

4.

Os gráficos das funções apresentadas nas opções (A) e (B) são parábolas cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, ambas têm um zero, mas que não está associado a uma mudança de sinal. Assim, cada uma destas funções é a segunda derivada de uma função sem pontos de inflexão, e pela observação do gráfico podemos constatar que a função f tem dois pontos de inflexão, pelo que nenhuma destas opções é a correta.

O gráfico da função da opção (C), é uma parábola com dois zeros simétricos, e por isso coerente com os pontos de inflexão observados no gráfico de f. No entanto, nesta opção f'' é negativa quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, e é positiva quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, pelo que esta também não é a opção correta. Logo, a opção correta é a D.

Resposta correta: (**D**)

Continuidade

5.

Por hipótese, como a função g é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $x = 0$, ou seja, verifica a condição $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{3x} \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln(k - x) = \ln k$$

$$g(0) = \ln k$$

Assim, $\ln k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{e}$

Resposta correta: (**A**)

Funcões trigonométricas

6.

Como $E\hat{O}A = D\hat{O}B$, por serem ângulos verticalmente opostos, $E\hat{A}O = D\hat{B}O$, por serem ângulos de lados diretamente paralelos, e $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raios), concluímos que os triângulos $[OEA]$ e $[ODB]$ são geometricamente iguais (critério ALA).

Como $\overline{OA} = 1$, $\overline{OE} = \operatorname{sen}\theta$ e $\overline{EA} = \cos\theta$.

Assim, o perímetro da região sombreada é:

Perímetro $= 2\left(\overline{AO} + \overline{EA} + \overline{OE}\right) = 2\left(1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right)$.

Resposta correta: (**C**)

N.ºs complexos

Conjuntos e condições

7.

Seja z_A o complexo cujo afixo é o ponto A, $z_A = \rho_A cis\theta_A$, então

$$z_A = \left|-\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2.$$

Sendo $\theta_A = \arg\left(-\sqrt{3} + i\right)$, temos:

$$\operatorname{tg}\theta_A = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta_A \in 2.^{\circ}Q. \text{ pelo que, } \theta_A = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Seja z_B o complexo cujo afixo é o ponto B, $z_B = 2cis\pi$.

A região sombreada, incluindo a fronteira, é definida pela condição:

$$|z| \leq 2 \wedge \arg z_A \leq \arg(z) \leq \arg z_B \Leftrightarrow |z| \leq 2 \wedge \frac{5\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \pi$$

Resposta correta: (**B**)

8.

Operações

$\operatorname{Im}\left(z_2 + z_4\right) = \operatorname{Im}\left(z_2\right) \neq 0$ e $\operatorname{Im}\left(z_6\right) < 0$ pelo que a soma de z_2 com z_4 só pode ser z_3.

A multiplicação de z_3 por i produz uma rotação de 90°, no sentido positivo, do afixo de z_3, conduzindo-nos a z_5.

Resposta correta: (**C**)

GRUPO II

N.os complexos

1.

Operações

1.1.

$$w = \frac{(1+2i)\times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}\,cis\left(\frac{5}{4}\pi\right)} = \frac{(1+2i)\times i^{3} - b}{\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{(1+2i)\times(-i) - b}{-1-i} =$$

$$= \frac{-i-2i^2-b}{-1-i} \times \frac{-1+i}{-1+i} = \frac{(-i+2-b)(-1+i)}{1-i^2} = \frac{i-2+b-i^2+2i-bi}{2} =$$

$$= \frac{-1+b+(3-b)i}{2} = \frac{-1+b}{2} + \frac{3-b}{2}i$$

Para w ser um número real, então o coeficiente da parte imaginária terá de ser igual a zero, ou seja, tem que se verificar:

$$\frac{3-b}{2} = 0 \Leftrightarrow 3-b=0 \Leftrightarrow b=3$$

Demonstrações

1.2.

Seja $z = a + bi$, um número complexo qualquer $(a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R})$.

Se $|z| = 1$, então $\sqrt{a^2+b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1$

Pelo que:

$$|1+z|^2 + |1-z|^2 = |1+a+bi|^2 + |1-a-bi|^2 =$$

$$= \left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1-a)^2+b^2}\right)^2 =$$

$$= 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 =$$

$$= 2 + 2\left(a^2+b^2\right) = 2 + 2\times 1 = 4$$

Como se queria demonstrar.

Probabilidades

Probabilidade condicionada

2.

2.1.

Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "ser licenciado"

B: "ter idade inferior a 40 anos"

	B	$\overline{B}$	Total
A	$(0,6 \times 0,8) = 0,48$	$(0,6 - 0,48) = 0,12$	0,6
$\overline{A}$	$(0,4 \times 0,1) = 0,04$	$(0,4 - 0,04) = 0,36$	$(1 - 0,6) = 0,4$
Total	0,52	0,48	1

Assim, a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao acaso, ser licenciado, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos, é dada por:

$$P\left(A|\overline{B}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{0,12}{0,48} = \frac{1}{4}$$

Combinatória

2.2.

A resposta II é a correta, ou seja, $6 \times {}^9C_2 + {}^9C_3$.

Ao escolher ao acaso um subconjunto de 3 funcionários, de entre os 15, para se ter pelo menos 2 funcionários que estejam a favor do novo horário significa que poderão ser escolhidos 2 ou 3 funcionários que estejam de acordo com esse horário.

Se forem 2 funcionários, teremos 1 funcionário escolhido entre os 6 que não estão a favor do novo horário, ${}^6C_2$, e 2 funcionários dos 9 que estão a favor, ${}^9C_2$.

Se forem escolhidos 3, têm de ser escolhidos entre os 9 funcionários que estão a favor, ${}^9C_3$.

Para que a resposta I estivesse correta teríamos de retirar, à expressão dada, o caso em que são escolhidos 3 funcionários, 1 a favor de entre os 9 e 2 dos 6 que são ou indecisos ou contra, ou seja, ${}^9C_1 \times {}^6C_2$. Assim, a resposta, para ser correta, deveria ser ${}^{15}C_3 - {}^6C_3 - 9 \times {}^6C_2$.

Deste modo, concluímos que a resposta I não está correta.

Funções

Exponenciais e logaritmos

3.

3.1.

$$N_A(0) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2 \times 0}} = 15 \quad \text{e} \quad N_A(7) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2 \times 7}} \approx 44,018$$

$$N_A(7) - N_A(0) \approx 44,018 - 15 \approx 29,018 \approx 29$$

O aumento foi de aproximadamente 29 nenúfares.

3.2.

$$N_A(t) = N_B(t) \Leftrightarrow \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0{,}2t}} = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0{,}4t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 120 + 6000 \times e^{-0{,}4t} = 150 + 1050 \times e^{-0{,}2t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6000 \times e^{-0{,}4t} - 1050 \times e^{-0{,}2t} - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6000 \times \left(e^{-0{,}2t}\right)^2 - 1050 \times e^{-0{,}2t} - 30 = 0$$

Seja $y = e^{-0{,}2t}$, substituindo na expressão anterior, temos que:

$$6000 \times y^2 - 1050 \times y - 30 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm \sqrt{1050^2 - 4 \times 6000 \times (-30)}}{2 \times 6000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm \sqrt{1822500}}{12000} \Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm 1350}{12000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{5} \vee y = -\frac{1}{40}$$

Como $y \geq 0$ para qualquer elemento do domínio, temos que: $e^{-0{,}2t} = \frac{1}{5}$

Ou seja,

$$e^{-0{,}2t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -0{,}2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0{,}2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(1) - \ln(5)}{-0{,}2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(5)}{0{,}2}$$

Assim, arredondando o resultado às unidades, temos aproximadamente 8 dias.

Funções

Resolução gráfica

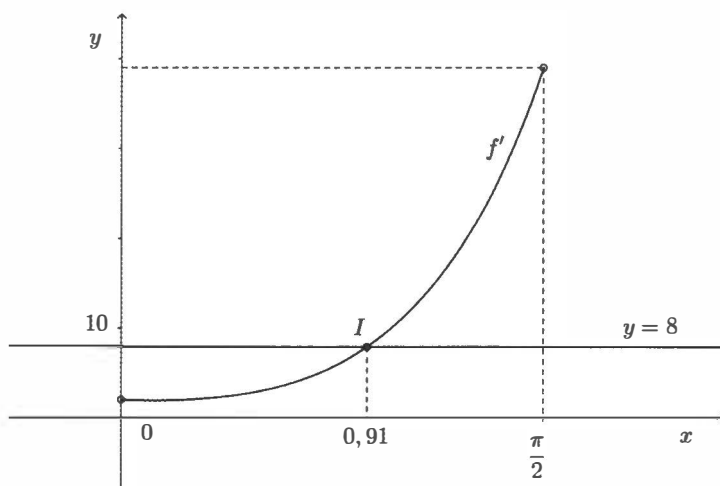
4.

Atendendo aos dados do problema, temos que o valor do declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto B tem de ser 8.

Comecemos por calcular $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(e^{2x} + \cos x - 2x^2\right)' = \left(2e^{2x} - \operatorname{sen} x - 4x\right)$$

Seja x a abcissa de B; então, $f'(x) = 8 \Leftrightarrow 2e^{2x} - \operatorname{sen} x - 4x = 8$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, representamos, numa janela adequada, a curva correspondente a $f'(x)$ e a reta de equação $y = 8$.

Determinando a interseção da reta de equação $y = 8$ com o gráfico de f', obtemos para a abcissa de B o valor de aproximado de $0{,}91$.

5.
5.1.

Assíntotas

Em cada um dos ramos em que se encontra definida, a função é contínua por se tratar de quocientes de funções contínuas no respetivo domínio. A existir assíntota vertical, esta terá de equação $x = 2$. Estudemos o limite da função quando x tende para 2 por valores inferiores (à sua esquerda) e por valores superiores (à sua direita):

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = -\lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} \quad (1)$$

Fazendo $y = 2 - x$ tem-se que, quando $x \to 2^-$, $y \to 0^+$, pelo que de (1) vem:

$$-\lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} = -\lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x + 1}{\ln(x + 1)}\right) = \frac{3}{\ln(3)}$$

Como os dois limites são números reais, o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

Teorema de Bolzano

5.2.

A função f é contínua em $[0,2[$ por se tratar do quociente de funções contínuas, pelo que também o é no intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

$$f(0)=\frac{e^2-1}{-2}\approx -3{,}19 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{2-\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}-2}\approx -2{,}32$$

Ora, como $f(0)<-3<f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, pelo teorema de Bolzano, existe pelo menos um valor $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ tal que $f(x)=-3$.

Como se queria demonstrar.

1.ª derivada

5.3.

Para $x>2$, vem:

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}\right)'=\frac{\ln(x+1)-(x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\ln(x+1)\right)^2}=\frac{\ln(x+1)-1}{\left(\ln(x+1)\right)^2}$$

Ora, para $x>2$, temos que $\ln(x+1)-1>0$, e, por outro lado, $\left(\ln(x+1)\right)^2>0$, pelo que $f'(x)>0,\ \forall x\in\left]2,+\infty\right[$.

Então, f é estritamente crescente neste intervalo.

Funções trigonométricas e 2.ª derivada

6.

Sendo a, b e n números reais positivos,

$$f'(x)=\left(a\cos(nx)+b\operatorname{sen}(nx)\right)'=\left(a\cos(nx)\right)'+\left(b\operatorname{sen}(nx)\right)'=$$

$$=-an\operatorname{sen}(nx)+bn\cos(nx)$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(-an\operatorname{sen}(nx)+bn\cos(nx)\right)'=\left(-an\operatorname{sen}(nx)\right)'+\left(bn\cos(nx)\right)'=$$

$$=-an(nx)'\cos(nx)+bn(nx)'\left(-\operatorname{sen}(nx)\right)=-an^2\cos(nx)-bn^2\operatorname{sen}(nx)$$

$$f''(x)+n^2f(x)=-an^2\cos(nx)-bn^2\operatorname{sen}(nx)+n^2\left(a\cos(nx)+b\operatorname{sen}(nx)\right)=$$

$$=-an^2\cos(nx)-bn^2\operatorname{sen}(nx)+an^2\cos(nx)+bn^2\operatorname{sen}(nx)=0$$

Como se queria demonstrar.

FIM

GRUPO I

1.

Consideremos os acontecimentos A e F, do espaço de resultados associado à experiência aleatória descrita, definidos da seguinte forma:

A: “O jovem escolhido, ao acaso, joga andebol”,

F: “O jovem escolhido, ao acaso, joga futebol”.

Tendo em conta que existem 28 jogadores que jogam apenas futebol e 12 que jogam futebol e andebol, ou seja, que o número total de praticantes de futebol é de 28 + 12 = 40 e que de entre estes, apenas 12 jogam andebol, então a probabilidade pedida é:

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{12}{28+12} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} .$$

Resposta correta: (**B**)

2.

Usando o modelo binomial, $P(X = k) = {}^nC_k \times p^k \times q^{n-k}$, para $n = 5$.

Para o acontecimento I , $p = q = \frac{1}{2}$ e $k = 2$.

Para o acontecimento J , $p = \frac{1}{6}$, pelo que $q = \frac{5}{6}$ e $k = 2$.

Assim, temos que:

$$P(I) = P(X = 2) = {}^5C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16} \approx 0{,}31$$

$$P(\bar{I}) = 1 - \frac{5}{16} \approx 0{,}69$$

$$P(J) = P(Y = 2) = {}^5C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888} \approx 0{,}16$$

$$P(\bar{J}) = 1 - \frac{625}{3888} \approx 0{,}84$$

Logo, o acontecimento mais provável é o acontecimento $\bar{J}$.

Resposta correta: (**D**)

Axiomática

3.

Sabe-se que A e B são dois acontecimentos incompatíveis, $P(A \cap B) = 0$, tais que $P(A) = 0{,}5$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$.

Como $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$, então temos que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}3 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 \Leftrightarrow 0{,}5 + P(B) - 0 = 0{,}7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}2$$

Resposta correta: (**A**)

Funções

Assíntotas

4.

Das informações dadas, sobre as equações das assíntotas do gráfico de f, podemos concluir que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ é equivalente a afirmar que a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (-2x)\right) = 0$, o que significa que a reta de equação $y = -2x$ é, também, assíntota do gráfico da função f.

Portanto, $y = -2x$ e $y = 1$ definem duas assíntotas do gráfico de f.

Resposta correta: (**C**)

2.ª derivada

5.

Como $f(x) = ax^2 - 1$, então $f''(x) = 2a$.

Da representação gráfica da função f'' dada na Figura 1, conclui-se que f'' é uma função constante e sempre negativa; portanto $2a < 0$, o que equivale a $a < 0$.

Apenas o valor -3 é compatível com a condição $a < 0$.

Resposta correta: (**D**)

Funcões trigonométricas

6.

A área do triângulo $[OAB]$ é dada por:

$$\frac{\overline{AO} \times \textit{altura relativa ao vértice } B}{2}.$$

Tendo em conta que a altura relativa ao vértice B é o simétrico da ordenada de B e como as coordenadas de B são $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, então

$$\frac{\overline{AO} \times \textit{altura relativa ao vértice } B}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \ u.a.$$

Resposta correta: (**A**)

N.os complexos

Equações

7.

$$z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow (3k + 2) + pi = (3p - 4) - (2 - 5k)i \Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 2 = 3p - 4 \\ p = -2 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k - 3p = -6 \\ 5k - p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - p = -2 \\ 5k - p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 4 \\ p = 5k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ p = 3 \end{cases}$$

Resposta correta: (**B**)

Potências e raízes

8.

w é o número complexo cuja imagem geométrica é A. Por sua vez, A é a imagem geométrica de uma das raízes de índice 8 de um certo número complexo, sendo que os vértices do octógono são as imagens geométricas de todas as raízes índice 8 desse mesmo número complexo. Desta forma, se $w = \rho cis\theta$, os números complexos cujas imagens geométricas são respetivamente B e C são $\rho cis\left(\theta + \frac{2\pi}{8}\right)$ e $\rho cis\left(\theta + \frac{4\pi}{8}\right)$.

Então, o vértice C, sendo a imagem geométrica do número complexo $\rho cis\left(\theta + \frac{4\pi}{8}\right)$, tem o mesmo módulo que w e o seu argumento difere de $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, ou seja, é o produto de w por i.

Resposta correta: (**C**)

GRUPO II

N.ºs complexos

1.

Potências e raízes

1.1.

Comecemos por simplificar a expressão de z_1 :

$$z_1 = 2 + \sqrt{3}i + i^{4n+2014} = 2 + \sqrt{3}i + \left(i^4\right)^n \times i^{2014} = 2 + \sqrt{3}i + 1^n \times i^{4 \times 503 + 2} =$$

$$= 2 + \sqrt{3}i + \left(i^4\right)^{503} \times i^2 = 2 + \sqrt{3}i + 1^{503} \times (-1) = 1 + \sqrt{3}i$$

Determinemos z_1 na forma trigonométrica:

- $\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
- $\text{tg}\theta = \sqrt{3}$ e $\theta \in 1.^o$ Q. , logo $\theta = \frac{\pi}{3}$ (argumento positivo mínimo).

Então, $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i = 2\, cis \frac{\pi}{3}$.

Sabendo que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z , então $z = {z_1}^3$.

Recorrendo à fórmula de Moivre para a potência, temos que:

$$z = \left(2\, cis \frac{\pi}{3}\right)^3 \Leftrightarrow z = 8\, cis \pi \Leftrightarrow z = -8 .$$

Conjuntos e condições

1.2.

IV é a opção correta.

A região sombreada na opção I é rejeitada pelo facto de o argumento dos complexos z , cujas imagens geométricas são os pontos da região, variar entre zero e $\frac{\pi}{2}$, não satisfazendo a condição $\frac{\pi}{2} \leq \arg(a) \leq 2\pi$.

A região definida na opção II pertence ao semiplano inferior relativo à mediatriz do segmento de reta de extremos O e C , pelo que os complexos z , que têm como imagens geométricas pontos da região, não cumprem a condição $|z| \geq |z - z_2|$.

Em III, os pontos da região sombreada que pertencem ao círculo de centro na origem do referencial e raio 1 são imagens geométricas de complexos z que não satisfazem a condição $|z - z_2| \leq 1$.

Probabilidades

Axiomática

2.

Uma vez que, pelas leis de De Morgan, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, e usando a definição de probabilidade condicionada de dois acontecimentos, tem-se que:

$$P\left(\overline{A \cap B} \mid B\right) = \frac{P\left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap B\right)}{P(B)}$$

Usando a propriedade distributiva da interseção em relação à união de conjuntos, obtemos

$$\frac{P\left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right)\right)}{P(B)}$$

Como $\overline{B} \cap B$ é o conjunto vazio e este é elemento neutro da união de acontecimentos, então

$$\frac{P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right)\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)}$$, que, por definição,

$$\frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} = P\left(\overline{A} \mid B\right).$$

Como se queria demonstrar.

Probabilidades

Combinatória

3.

3.1.

O número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas, é dado por $3! \times 10! \times 11$, ou seja, 239 500 800.

Há $3!$ formas diferentes de colocar as três figuras juntas, independentemente do lugar que ocupam. Estando as três figuras colocadas, há $10!$ maneiras de as 10 cartas que não são figuras se distribuírem pelos lugares livres.

Por último, há 11 formas diferentes de o conjunto constituído pelas três figuras juntas se distribuir na sequência.

Combinatória

3.2.

Para determinar a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos 2 figuras, comecemos por calcular o número de casos possíveis: ${}^{13}C_4$.

Quanto ao número de casos favoráveis, é dado por ${}^{3}C_3 \times {}^{10}C_1 + {}^{3}C_2 \times {}^{10}C_2$, uma vez que ${}^{3}C_3 \times {}^{10}C_1$ corresponde ao número de casos em que há 3 figuras quando retiramos 4 das 13 cartas de copas e ${}^{3}C_2 \times {}^{10}C_2$ é o número de casos com exatamente 2 figuras e outras 2 cartas que não são figuras.

A probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{3}C_3 \times {}^{10}C_1 + {}^{3}C_2 \times {}^{10}C_2}{{}^{13}C_4} = \frac{1 \times 10 + 3 \times 45}{715} = \frac{29}{143}.$$

Funções

Logaritmos

4.

Se a função Q nos dá a quantidade, em litros, de combustível existente no depósito de uma certa máquina agrícola em função do tempo t, em minutos, durante os 20 minutos em que esteve a funcionar, então $Q(0) - Q(20) = 2$, pois a máquina consumiu 2 litros de combustível.

$$Q(0) - Q(20) = 2 \Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - k \times 0) - \left(12 + \log_3\left(81 - k \times 20^2\right)\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 81 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3(81 - 400k) = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^2 = 81 - 400k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{9}{50}$$

Continuidade

5.

5.1.

Como f é contínua em $x=-1$, temos que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$.

Determinemos o valor de a:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}}+1\right) = a+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\left(-\frac{x+1}{e^{x+1}-1}\right)+1 = a+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{\frac{e^{x+1}-1}{x+1}}\right)+1 = a+2$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x+1 \Leftrightarrow x = y+1$ e como $x \to -1$ então, $y \to 0$.

Assim,

$$\lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{\frac{e^{x+1}-1}{x+1}}\right)+1 = a+2 \Leftrightarrow \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{\frac{e^{y}-1}{y}}\right)+1 = a+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}\right)+1 = a+2 \Leftrightarrow -1+1 = a+2 \Leftrightarrow a=-2$$

5.2.

1.ª derivada e Teorema de Bolzano

Determinemos $f'(x)$ para $x \in]0\,,1[$:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}}\right)' + 1' = \frac{1\times\left(1-e^{x+1}\right)-\left(-e^{x+1}\right)\times(x+1)}{\left(1-e^{x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{1-e^{x+1}+e^{x+1}\times x+e^{x+1}}{\left(1-e^{x+1}\right)^2} = \frac{1+xe^{x+1}}{\left(1-e^{x+1}\right)^2}$$

Calculemos $f'(0)$ e $f'(1)$:

$$f'(0) = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}34 \quad \text{e} \quad f'(1) = \frac{1+e^2}{\left(1-e^2\right)^2} \approx 0{,}21\,.$$

Como a função f' é uma função contínua em $[0\,,1]$, por ser o quociente entre funções contínuas, a saber, soma e quociente de funções polinomiais com exponenciais, e $f'(1) < \frac{1}{4} < f'(0)$, então podemos concluir pelo teorema de Bolzano, que $\exists\, c \in]0\,,1[: f'(c) = \frac{1}{4}$, ou seja, a equação $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0\,,1[$.

Funções

Limites

6.

6.1.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{f(x)-\pi}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(5x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}\times \operatorname{sen} x\times \frac{1}{\operatorname{sen}(5x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}\times\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{x}{\operatorname{sen}(5x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{5x}{\operatorname{sen}(5x)}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times 1\times 1=-\frac{1}{20}$$

Note-se que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ é um limite notável.

2.ª derivada

6.2.

Para se estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, determinemos a segunda derivada da função g.

$$g''(x)=\left(\log_2\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)\right)'=\frac{\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)'}{\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)\ln 2}=\frac{-1}{\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)\ln 2}=\frac{1}{\left(+\frac{\pi}{6}+x\right)\ln 2}$$

Analisando o sinal de $g''(x)$ quando $x\in\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right[$, tem-se que

$g''(x)<0,\ \forall x\in\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right[$, o que nos permite concluir o seguinte:

O gráfico da função g tem concavidade voltada para baixo quando $x\in\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right[$ e neste intervalo o gráfico de g não tem pontos de inflexão.

Resolução gráfica

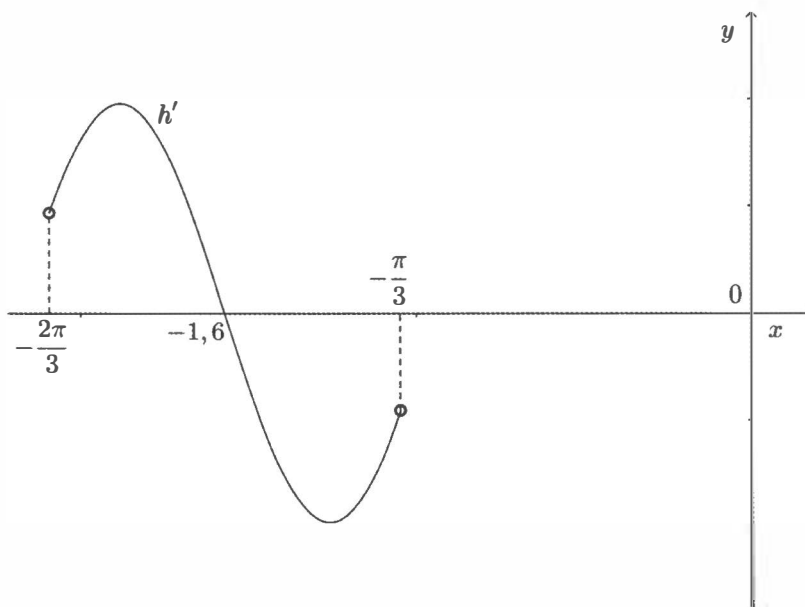
6.3.

Se a reta tangente ao gráfico de h, no ponto A, é paralela ao eixo Ox, ou seja, tem declive zero, determinemos a função que nos dá os declives das retas tangentes ao gráfico de h, em cada ponto de abcissa $x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, para podermos analisar quando vale zero.

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \left(-4\operatorname{sen}(5x)\right)' - \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right) =$$

$$= -4\left(\operatorname{sen}(5x)\right)' - \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right) = -20\cos(5x) - \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$$

A abcissa do ponto A é a solução da equação $h'(x) = 0$ quando $x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, representamos, numa janela adequada, a curva correspondente a $h'(x)$:

Assim, a abcissa do ponto A é −1,6.

FIM

GRUPO I

1.

Axiomática

Temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, e como A e B são acontecimentos independentes, vem que: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) \times (1 - P(A)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) \times P(\overline{A}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cup B) - P(A)}{P(\overline{A})} = P(B)$$

Como $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, temos que:

$$P(B) = \frac{0{,}73 - 0{,}1}{0{,}9} = \frac{0{,}63}{0{,}9} = 0{,}7$$

Resposta correta: (**D**)

2.

Probabilidade condicionada

Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:

R: "O aluno ser uma rapariga"

I: "O aluno ter Inglês"

O número de raparigas que têm Inglês é $20 - 4 = 16$.

Assim, como a turma tem 18 raparigas, o número de raparigas que não têm Inglês é $18 - 16 = 2$.

Logo, a probabilidade de selecionar um aluno que não tem Inglês, de entre o conjunto das raparigas, é:

$$P(\overline{I} \mid R) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

Resposta correta: (**A**)

Triângulo de Pascal

3.

Como a soma dos três primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 61 426 e o terceiro elemento dessa linha é 61 075 e, como sabemos que o primeiro é 1, podemos calcular o segundo número (b):

$$61426 = 1 + b + 61075 \Leftrightarrow 61426 - 1 - 61075 = b \Leftrightarrow b = 350$$

Assim podemos calcular os primeiros números da linha seguinte:

$350 + 1 = 351$ e $350 + 61075 = 61425$

	1		350		61 075		...
1		351		61 425		...	

Como a soma dos últimos três elementos de qualquer linha é igual à soma dos primeiros três elementos dessa linha, temos que a soma pretendida é:

$61425 + 351 + 1 = 61777$.

Resposta correta: (**C**)

Funções

Limite segundo Heine

4.

Averiguando as quatro hipóteses, temos:

- Como $\lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2^-$, logo $\lim f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = e^2 - 1$
- Como $\lim\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2^+$, logo $\lim f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{4}{2} + 1 = 2 + 1 = 3$
- Como $\lim\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3^-$, logo $\lim f\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$
- Como $\lim\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3^+$, logo $\lim f\left(3 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$
- Assim, temos que: se $u_n = 2 + \frac{1}{n}$, então $\lim f(u_n) = 3$

Resposta correta: (**B**)

5.

1.ª derivada

Podemos descrever a variação do sinal de h', pela análise do gráfico, e relacionar com a monotonia da função h:

x		0	
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	máx.	↘

Ou seja, a função h é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$, e apenas o gráfico da opção (D) é compatível com esta conclusão.

Resposta correta: (**D**)

6.

1.ª derivada

Como o declive, m, da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é $g'(1)$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = ((2x-1) \times f(x))' = (2x-1)' f(x) + (2x-1)f'(x) =$$

$$= 2f(x) + (2x-1)f'(x)$$

Calculando o declive da reta tangente, temos:

$$m = g'(1) = 2f(1) + (2 \times 1 - 1)f'(1) = 2 \times 1 + (2 \times 1 - 1) \times 1 = 2 + 1 \times 1 = 3$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos:

$g(1) = (2 \times 1 - 1) \times f(1) = (2-1) \times 1 = 1$, ou seja, o ponto $P(1\ ,\ 1)$ é um ponto do gráfico de g que também pertence à reta tangente.

Substituindo o valor do declive na equação da reta, obtém-se $y = 3x + b$

Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$1 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow 1 - 3 = b \Leftrightarrow -2 = b$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $x = 1$ é:

$y = 3x - 2$

Resposta correta: (**A**)

N.os complexos

Potências e raízes

7.

Usando a fórmula de Moivre para a radiciação, temos que:

$w_k = \sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8}\, cis\left(\dfrac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6}\right), (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, em que, para cada uma das raízes de índice 6:

- $|w_k| = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

- Para cada valor de k:

$$\arg(w_k) = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{6} = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6} = \frac{\pi}{36} + \frac{12k\pi}{36} = \frac{\pi + 12k\pi}{36}$$

Assim, se $k = 2$, temos que: $\arg(w_2) = \dfrac{\pi + 24\pi}{36} = \dfrac{25\pi}{36}$

Ou seja, $w_2 = \sqrt{2}\, cis\, \dfrac{25\pi}{36}$.

Resposta correta: (**A**)

Operações

8.

Considere-se $\arg(z)$, com $z \neq 0$, o argumento do número complexo z pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$. Sejam $\arg(z_1)$ e $\arg(z_2)$ os argumentos de z_1 e de z_2, respetivamente.

Como $z_1 = 2 + i$ e $\operatorname{tg}(\arg(z_1)) = \dfrac{1}{2}$, então $0 < \arg(z_1) < \dfrac{\pi}{4}$.

Como o produto de dois números complexos admite como argumento a soma de dois argumentos arbitrários destes, tem-se $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Ora, por observação da figura, tem-se $\dfrac{3\pi}{4} < \arg(z_1 \times z_2) < \pi$ (*)

Por outro lado, $0 < \arg(z_1) < \dfrac{\pi}{4}$ o que equivale a $-\dfrac{\pi}{4} < -\arg(z_1) < 0$ (**)

Adicionando membro a membro as desigualdades (*) e (**), obtemos:

$\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} < \arg(z_1 \times z_2) - \arg(z_1) < \pi + 0$, isto é, $\dfrac{\pi}{2} < \arg(z_2) < \pi$.

De todas as hipóteses apresentadas, podemos afirmar que a imagem geométrica do número complexo z_2 só pode ser o ponto R.

Resposta correta: (**C**)

N.os complexos

Equações

GRUPO II

1.

1.1.

Resolvendo a equação, vem:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \times \sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Conjunto solução $= \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \, ; \, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$.

Como w é a solução com coeficiente da parte imaginária positivo, $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Escrevendo w na forma trigonométrica, temos $w = cis\theta$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$

- $\text{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\text{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, então θ é um ângulo do 2.º Q.,

  logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Assim, $w = cis\frac{2\pi}{3}$ e, portanto, $\frac{1}{w} = \frac{1cis0}{cis\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{1}cis\left(0 - \frac{2\pi}{3}\right) = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Demonstrações

1.2.

Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Assim, temos que $\bar{z} = a - bi$, pelo que:

$$(\bar{z} + i) \times (z - i) = (a - bi + i) \times (a + bi - i) =$$

$$= a^2 + abi - ai - abi - b^2i^2 + bi^2 + ai + bi^2 - i^2 =$$

$$= a^2 - b^2 \times (-1) + b \times (-1) + b \times (-1) - (-1) =$$

$$= a^2 + b^2 - 2b + 1$$

E como

$$|z - i|^2 = |a + bi - i|^2 = |a + i(b - 1)|^2 = \left(\sqrt{a^2 + (b-1)^2}\right)^2 =$$

$$= a^2 + (b - 1)^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

temos que: $(\bar{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$.

Como se queria demonstrar.

Probabilidades

2.

Combinatória

2.1.

Como o João escolhe 4 cores de entre um conjunto de 12, e cada cor se destina a pintar uma das faces numeradas, a ordem da seleção é relevante. Assim, o João pode pintar o tetraedro de $^{12}A_4$ formas diferentes, sendo este o número de casos possíveis.

Se pretendermos que a cor preferida do João esteja entre as cores escolhidas, ainda podemos pintar qualquer uma das 4 faces com essa cor, pelo que existem 4 casos a considerar.

Por cada um destes 4 casos, devemos selecionar 3 cores de entre as restantes 11, considerando a ordem relevante. Ou seja, o número de casos favoráveis é $4 \times {}^{11}A_3$.

Assim, a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João é $\frac{4 \times {}^{11}A_3}{^{12}A_4} = \frac{1}{3}$.

2.2.

Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\left(P(X = k) = {}^nC_k \; p^k \; q^{n-k} \right)$.

Temos que:

- $n = 3$ (o dado é lançado 3 vezes de forma independente);
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade de sucesso, ou seja, «*Sair a face com o número 1*», é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem 4 faces, das quais apenas uma tem o número 1);
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade de insucesso, pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Assim, calculando a probabilidade de a face com o número 1 ocorrer 0, 1, 2 ou 3 vezes, temos:

- $P(X = 0) = {}^3C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 1) = {}^3C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3^2}{4^2} = \frac{27}{64}$
- $P(X = 2) = {}^3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{4^2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$
- $P(X = 3) = {}^3C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{4^3} \times 1 = \frac{1}{64}$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

Probabilidade condicionada

2.3.

No contexto da situação descrita, $P(J|I)$ é a probabilidade de que ao lançar quatro vezes o tetraedro, a soma dos números registados nos quatro lançamentos seja menor do que 10, sabendo que nos três primeiros lançamentos saiu sempre o número 2.

Como sabemos que a soma relativa aos três primeiros lançamentos é $2 + 2 + 2 = 6$, para que a soma dos quatro lançamentos seja inferior a 10, no último lançamento podem sair as faces com os números 1 (que resultará na soma 7), 2(soma 8) ou 3 (soma 9).

Assim, usando a Regra de Laplace para a determinação da probabilidade, temos quatro casos possíveis, correspondentes às faces que podem sair no quarto lançamento, e três casos favoráveis, relativos às faces que correspondem a uma soma inferior a 10, pelo que $P(J|I) = \frac{3}{4}$.

Funções

Logaritmos

3.

3.1.

Sabendo que $M = 7{,}1$, podemos calcular a energia sísmica irradiada, substituindo o valor dado em $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9$:

$$7{,}1 = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9 \Leftrightarrow \frac{(7{,}1 + 2{,}9) \times 3}{2} = \log_{10}(E) \Leftrightarrow \log_{10}(E) = 15 \Leftrightarrow E = 10^{15}$$

Como a relação entre o momento sísmico e a energia libertada é $E = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5}$, substituindo o valor de E nesta expressão, vem:

$$10^{15} = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{10^{15}}{1{,}6 \times 10^{-5}} = M_0 \Leftrightarrow M_0 = 0{,}625 \times 10^{15} \times 10^5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_0 = 0{,}625 \times 10^{15} \times 10^5 \Leftrightarrow M_0 = 6{,}25 \times 10^{-1} \times 10^{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_0 = 6{,}25 \times 10^{19}$$

3.2.

Sabemos que $M_1 - M_2 = \frac{2}{3}$.

Sejam E_1 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 e E_2 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.

Assim, temos que $M_1 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9$ e $M_2 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) - 2{,}9$, pelo que:

$$M_1 - M_2 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9\right)$$

Logo,

$$\frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2) - 2{,}9\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) + 2{,}9 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2)\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) = 1 \Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^1 \Leftrightarrow E_1 = 10 \times E_2$$

Portanto, a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.

Funções

Continuidade

4.

4.1.

Sabendo que f é contínua para $x = 1$, temos que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, e em particular que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

Como $f(1) = -1 + \ln 1 = -1 + 0 = -1$, vamos calcular $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ para determinar o valor de k:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(k + \frac{1 - e^{x-1}}{x - 1}\right) = \lim_{x\to 1^-} k + \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1 - e^{x-1}}{x - 1}\right) =$$

$$= k + \lim_{x\to 1^-} \frac{-\left(e^{x-1} - 1\right)}{x - 1} \underset{(1)}{=} k - \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{\left(e^{y} - 1\right)}{y}}_{\textit{Limite notável}} = k - 1$$

(1) Se $y = x - 1$, então como $x\to 1^-$, logo $y\to 0^-$.

Assim, como f é contínua para $x = 1$, temos que $f(1) = k - 1$, ou seja, $-1 = k - 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Assíntotas

4.2.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais do gráfico de f temos que calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Assim, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1-e^{x-1}}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{x-1}}{x-1} = 3+\frac{1-e^{-\infty-1}}{-\infty-1} =$$

$$= 3+\frac{1-0}{-\infty} = 3-0 = 3$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de f (quando $x\to-\infty$).

Temos ainda que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x+\ln x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(-1+\frac{\ln x}{x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \times \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x \times \left(\lim_{x\to+\infty}(-1) + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\text{Limite notável}}\right) =$$

$$= +\infty \times (-1+0) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

Assim, podemos afirmar que o gráfico de f não tem assíntotas horizontais quando $x\to+\infty$, ou seja, $y = 3$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f.

5.

Como se pretende determinar os extremos da função, vamos recorrer aos zeros da derivada, e por isso começamos por derivar a função:

$$g'(x) = (x - 2\cos x)' = (x)' - (2\cos x)' = 1 - 2(-\operatorname{sen} x) = 1 + 2\operatorname{sen} x$$

Depois, determinamos os zeros da derivada, ou seja, as abcissas dos pontos C e D:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores inteiros a k, podemos encontrar os valores de x que pertencem ao domínio da função: $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ e $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6}$

Estudando a variação de sinal de g' e relacionando com a monotonia da função g, vem:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	n. d.	+	0	–	0	+	n. d.
$g(x)$	n. d.	↗	máx.	↘	mín.	↗	n. d.

Assim, temos que a abcissa do ponto C é $x_C = -\frac{5\pi}{6}$, e a ordenada é:

$$g\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$$

Ou seja, o ponto C tem coordenadas $C\left(-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$.

De forma análoga, temos que a abcissa do ponto D é $x_D = -\frac{\pi}{6}$, e a ordenada é:

$$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

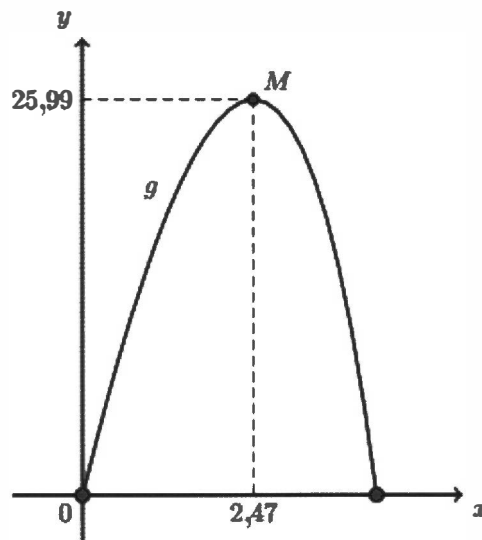
Ou seja, o ponto D tem coordenadas $D\left(-\frac{\pi}{6}, -\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Resolução gráfica

6.

Considerando a abcissa x do ponto A como a medida do lado horizontal do retângulo, a medida correspondente do lado vertical é $f(x)$, ou seja, a área $A_{[OACB]}$ é dada pela função g definida pela condição:

$$g(x) = x \times f(x) = x\left(2 + 15\ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)\right),\ g(x) \geq 0 \wedge x \in]0\ ,6[$$

Traçando na calculadora gráfica o gráfico da função g, numa janela compatível com o domínio, obtemos o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Utilizando a função da calculadora gráfica que permite determinar valores aproximados para o maximizante (e para o máximo) da função, determinamos as coordenadas do ponto $M(2{,}47\ ;\ 25{,}99)$, o que nos permite concluir que o retângulo $[OACB]$ tem área máxima quando o ponto A (e também o ponto C) tem abcissa $x \approx 2{,}47$.

FIM

GRUPO I

1.

Como $P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$ vem que: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

Sabendo que A e B são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{10} + P(B) - \frac{3}{10}P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{20} \times \frac{10}{7} = P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{90}{140} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{14}$$

Resposta correta: (**B**)

2.

Recorrendo à probabilidade do acontecimento contrário, a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro é:

$$P = 1 - \frac{2 \times 6!}{7!} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Resposta correta: (**D**)

3.

Temos ${}^{12}C_7$ formas de arrumar os 7 copos brancos nos 12 compartimentos. Como os copos são iguais a ordem não é relevante.

Por cada arrumação diferente dos copos brancos, devemos considerar ${}^{5}A_3$ hipóteses diferentes para colocar os copos de outras cores, que correspondem a selecionar 3 dos 5 compartimentos vazios, e em que a ordem da seleção é relevante por se destinarem a copos de cores diferentes.

Assim, o número de arrumações diferentes é ${}^{12}C_7 \times {}^{5}A_3$.

Resposta correta: (**C**)

Funções

Teorema de Bolzano

4.

Como $f(x) = e^x - 3$, tem-se que:

$$f(x) = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 + x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{3}{2} = 0$$

Seja $g(x) = e^x + x - \frac{3}{2}$. Como g é uma função contínua em $\mathbb{R}$, por resultar de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, e atendendo a que:

$g(0) < 0$; $g\left(\frac{1}{5}\right) < 0$; $g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$; $g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$; $g(1) > 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano, temos que:

$g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, pelo que $g(x)$ tem pelo menos um zero em $\left]\frac{1}{5} ; \frac{1}{4}\right[$, ou seja, $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem pelo menos um zero em $\left]\frac{1}{5} ; \frac{1}{4}\right[$.

Resposta correta: (**B**)

Continuidade

5.

Uma vez que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua para $x = a$, pelo que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} \left(\log_3\left(-x - \frac{1}{3} \right) \right) = \log_3\left(-a - \frac{1}{3} \right)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(a) = 2$$

$$f(a) = g(a) = 2$$

Assim, temos que:

$$\log_3\left(-a - \frac{1}{3} \right) = 2 \Leftrightarrow -a - \frac{1}{3} = 3^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} - 9 \Leftrightarrow a = -\frac{28}{3}$$

6.

1.ª derivada e 2.ª derivada

De acordo com os dados e por observação do gráfico da função f constatamos que existe um intervalo aberto I, que contém o número 1, onde f é estritamente decrescente, pelo que $f'(x) \leq 0, \ \forall \ x \in I$. Então, $f'(1) \leq 0$ e a alternativa (**A**) é falsa.

De acordo com os dados e por observação do gráfico da função f constatamos que existe um intervalo aberto J, que contém o número -3, onde f é estritamente decrescente, pelo que $f'(x) \leq 0, \ \forall \ x \in J$. Então, $f'(-3) \leq 0$ e a alternativa (**B**) é falsa.

De acordo com os dados e por observação do gráfico da função f constatamos que existe um intervalo aberto L, que contém o número 1, onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, pelo que $f''(x) \leq 0, \ \forall \ x \in L$. Então, $f''(1) \leq 0$ e a alternativa (**D**) é falsa.

Deste modo, só $f''(-3)$ pode ser positivo.

Resposta correta: (**C**)

7.

N.os complexos

Operações

Sejam $\arg(w)$ o argumento principal de w, isto é, o argumento de w no intervalo $]-\pi , \pi]$ e w a sua imagem geométrica.

Como w é um número complexo cuja imagem geométrica, W, pertence ao 2.º quadrante, podemos escrever $w = \rho cis(\theta)$, onde $\rho = |w|$ e $\theta = \arg(w)$, com $\theta \in \left]\frac{\pi}{2} , \pi\right[$.

Na forma trigonométrica: $3i = 3cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Então, $\frac{w}{3i} = \frac{\rho cis(\theta)}{3cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\rho}{3}cis\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

Assim, temos que:

$\frac{\rho}{3} < \rho$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \theta - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Logo, o ângulo de amplitude $\theta - \frac{\pi}{2}$ pertence ao 1.º quadrante e portanto o número complexo que pode ser igual a $\frac{w}{3i}$ só pode ser z_1 ou z_2.

Como $\frac{\rho}{3} < \rho$, por observação da figura, concluímos que o número complexo igual a $\frac{w}{3i}$ só pode ser z_1.

Resposta correta: (**A**)

Conjuntos e condições

8.

Como se sabe que as circunferências têm centro na origem e raios iguais a 3 e a 6 a coroa circular é definida pela condição:

$3 \leq |z| \leq 6 \qquad (1)$

Então, as alternativas (**B**) e (**D**) estão incorretas.

Como a origem das semirretas $\dot{Q}P$ e $\dot{Q}R$ é o ponto Q , imagem geométrica do complexo $-1 + i$, então Q tem coordenadas $(-1\ ,\ 1)$.

Logo,

$$\dot{Q}P\colon \arg\left(z - (-1 + i)\right) = -\pi \qquad \text{e} \qquad \dot{Q}R\colon \arg\left(z - (-1 + i)\right) = \frac{3\pi}{4} \qquad (2)$$

Então, a alternativa (**A**) está incorreta.

De (1) e (2) conclui-se que a região a sombreado é definida por:

$$3 \leq |z| \leq 6 \wedge -\pi \leq \arg\left(z + 1 - i\right) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Resposta correta: (**C**)

GRUPO II

N.os complexos

Equações

1.

1.1.

$$z_1 = (-2+i)^3 = (-2)^3 + 3\times(-2)^2\times i + 3\times(-2)\times i^2 + i^3 = -2+11i$$

$$z_2 = \frac{1+28i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i+56i-28i^2}{4-i^2} = \frac{30+55i}{5} = 6+11i$$

$$z^3 + (-2+11i) = 6+11i \Leftrightarrow z^3 = 6+11i+2-11i \Leftrightarrow z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 = 8cis0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8cis0} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}\,cis\left(\frac{0+k\times 2\pi}{3}\right),\ k = 0,1 \text{ e } 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 2cis\left(k\times\frac{2\pi}{3}\right),\ k = 0,1 \text{ e } 2$$

Para $k = 0$, tem-se que: $z = 2cis0$;

Para $k = 1$, tem-se que: $z = 2cis\frac{2\pi}{3}$;

Para $k = 2$, tem-se que: $z = 2cis\left(2\times\frac{2\pi}{3}\right) = 2cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$;

Vem então: $z = 2cis0 \vee z = 2cis\frac{2\pi}{3} \vee z = 2cis\frac{4\pi}{3}$.

1.2.

Potências, raízes e demonstrações

Sabemos que $w^n = z$ e também $\left(\frac{1}{w}\right)^n = z$ com $n \in \mathbb{N}$.

Sendo $w = \rho cis(\theta)$, temos que:

$$w^n = \rho^n cis(n\theta) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{w}\right)^n = \frac{1}{\rho^n cis(n\theta)} = \frac{cis0}{\rho^n cis(n\theta)} = \frac{1}{\rho^n}cis(0-n\theta)$$

Como $w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n$, temos que:

$$\rho^n cis(n\theta) = \frac{1}{\rho^n}cis(-n\theta) \Leftrightarrow \rho^n = \frac{1}{\rho^n} \wedge n\theta = -n\theta + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Assim, $\rho^n = \frac{1}{\rho^n} \Leftrightarrow (\rho^n)^2 = 1 \Leftrightarrow \rho^{2n} = 1 \Leftrightarrow \rho = \sqrt[2n]{1} \Leftrightarrow \rho = 1$, pois $\rho^n \in \mathbb{R}^+$

e

$n\theta = -n\theta + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2n\theta = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n\theta = \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Desta forma, temos que:

$z = 1cis(n\theta) \Leftrightarrow z = cis(k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$, pelo que para valores pares de k temos $z = 1$, e para valores ímpares de k temos $z = -1$.

Probabilidades

Probabilidade condicionada

2.

2.1.

Consideram-se os acontecimentos:

A : «O aluno escolhido é um rapaz»

B : «O aluno escolhido tem excesso de peso»

e os respetivos acontecimentos contrários, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

- Considerando que podemos organizar a informação do enunciado numa tabela:

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total	$1 - 0{,}550 = 0{,}450$	$0{,}550$	1

- Considerando que $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}3$ podemos calcular $P\left(B \cap \overline{A}\right)$ e $P\left(\overline{B} \cap \overline{A}\right)$:

	A	$\overline{A}$	Total
B		$0{,}3 \times 0{,}550 = 0{,}165$	
$\overline{B}$		$0{,}550 - 0{,}165 = 0{,}385$	
Total	$1 - 0{,}550 = 0{,}450$	$0{,}550$	1

- Considerando que $P\left(\overline{B} \mid A\right) = 0{,}4$ podemos calcular $P\left(\overline{B} \cap \overline{A}\right)$ e $P\left(\overline{B} \cap A\right)$:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$0{,}450 - 0{,}180 = 0{,}270$	$0{,}3 \times 0{,}550 = 0{,}165$	$0{,}435$
$\overline{B}$	$0{,}4 \times 0{,}450 = 0{,}180$	$0{,}550 - 0{,}165 = 0{,}385$	$0{,}565$
Total	$1 - 0{,}550 = 0{,}450$	$0{,}550$	1

Assim, de acordo com a informação da tabela, temos que a probabilidade de que o aluno escolhido seja rapaz, sabendo que tem excesso de peso, ou seja, $P\left(A \mid B\right)$, é dada por:

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{0{,}270}{0{,}435} = \frac{18}{29}.$$

Combinatória

2.2.

Como 55 % dos alunos são raparigas e existem 200 alunos, temos $0{,}550 \times 200 = 110$ raparigas e $200 - 110 = 90$ rapazes.

Assim, a probabilidade de escolher duas raparigas e um rapaz, numa seleção aleatória de três alunos, é dada por: $\frac{{}^{110}C_2 \times {}^{90}C_1}{{}^{200}C_3} \approx 0{,}41$.

3.

Distribuições de probabilidades

Como no saco existem 5 bolas e são extraídas 4, simultaneamente, existem apenas 5 casos possíveis, que são ${}^{5}C_4$.

O produto dos números extraídos é 0 (zero) sempre que a bola com o número 0 tenha sido extraída, ou seja, em 4 dos 5 casos possíveis. Nestes casos, o valor da variável X é 0.

No caso restante, as bolas extraídas não incluem a bola com o número 0, ou seja, são extraídas as bolas com os números -2, -1, 1 e 2; logo, o produto dos números saídos é $-2 \times (-1) \times 1 \times 2 = 4$. Neste caso o valor da variável X é 4.

Como as bolas são extraídas simultaneamente, existem ${}^{5}C_4 = 5$ casos possíveis.

Assim:

$P(X = 0) = \frac{4}{5}$, pois o zero está presente em 4 das 5 extrações, e

$P(X = 4) = \frac{1}{5}$, pois o zero não está presente em apenas 1 das 5 extrações.

Funções

Exponenciais e logaritmos

4.

4.1.

Para determinar o zero da função f , vamos resolver a equação $f(x) = 0$:

$$e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow e^2 \times e^{x-2} - \left(4e^{-x} + 4\right) = 0 \Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{4}{e^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 4e^x - 4 = 0$$

Sendo $y = e^x$, vem:

$$y^2 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + 2\sqrt{2} \vee y = 2 - 2\sqrt{2}$$

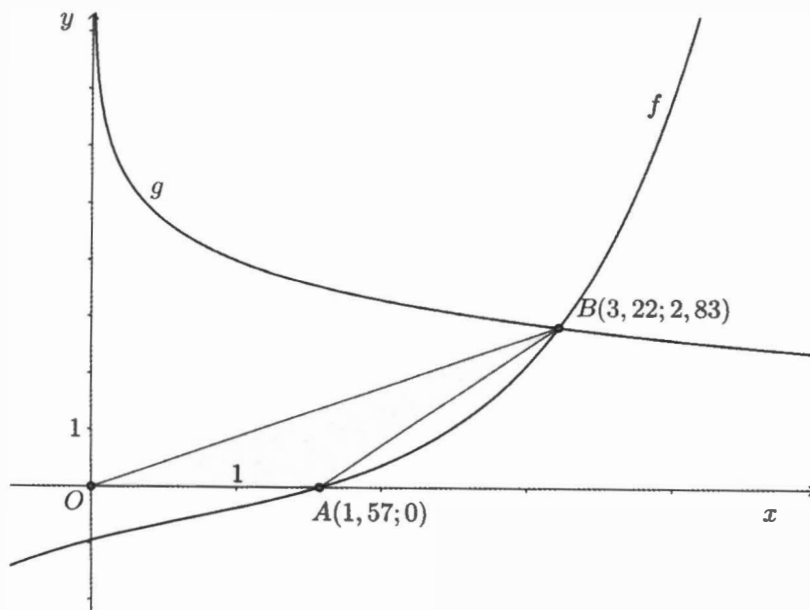
Como $y = e^x$ temos $e^x = 2 + 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 - 2\sqrt{2}$.

Uma vez que $2 - 2\sqrt{2} < 0$ e $e^x > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, a equação $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$ é impossível.

Logo, $e^x = 2 + 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow e^x = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(2 + 2\sqrt{2}\right)$

Portanto, $\ln\left(2 + 2\sqrt{2}\right)$ é o único zero da função f .

4.2.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, representamos, numa janela adequada, os gráficos das funções f e g:

De onde observamos que a abcissa do ponto A é, aproximadamente, 1,57 e que o ponto B, de intersecção do gráfico da função f com o gráfico da função g, tem de coordenadas $(3{,}22\ ;\ 2{,}83)$, aproximadamente.

Considere-se para base do triângulo $[OAB]$ o segmento $[OA]$ e seja B_1 a projeção ortogonal do ponto B sobre a reta OA. Então, a sua altura $h = \overline{BB_1}$ é igual ao valor absoluto da ordenada, y, do ponto B.

Assim, a área do triângulo $[OAB]$ é dada por $A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{BB_1}}{2}$, onde $\overline{OA} \approx 1{,}57$ e

$\overline{BB_1} = |y_B| \underset{(1)}{=} y_B \approx 2{,}83$

(1) a ordenada do ponto B é positiva.

Então, $A_{[OAB]} = \frac{1{,}57 \times 2{,}83}{2} \approx 2{,}2$, ou seja, a área do triângulo $[AOB]$ é aproximadamente 2,2 *u.a.*

Assíntotas

5.

5.1.

Se existirem assíntotas não verticais, o respetivo declive é dado por:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Calculando $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ temos:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\times e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x}\right)=e^{1+\infty}=+\infty$$

Pelo que não existe assíntota não vertical quando $x\to-\infty$.

Calculando $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln(x)+3\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+3=\ln(1)+3=3$$

Pelo que, a existir uma assíntota quando $x\to+\infty$, o respetivo declive será 3.

A ordenada na origem é dada por: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$.

Calculando:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x-3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln(x+1)-x\ln(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$$

Considerando $y=\frac{1}{x}$, se $x\to+\infty$, então $y\to0^+$, e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{y\to0^+}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right)=1 \quad \text{(limite notável)}$$

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=1$, pelo que a reta de equação $y=3x+1$ é a única assíntota não vertical do gráfico de f.

5.2.

1.ª derivada

Para determinar a equação da reta tangente, começamos por determinar o respetivo declive, ou seja, $f'(-1)$. Assim, determina-se a derivada da função f para valores inferiores a 0.

$$f'(x) = (x)' e^{1-x} + x\left(e^{1-x}\right)' = e^{1-x} + x\left(-1 \times e^{1-x}\right) = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$$

Portanto, o declive da reta tangente é $m = f'(-1) = e^{1-(-1)} \times (1-(-1)) = 2e^2$.

Calculando $f(-1) = (-1) \times e^{1-(-1)} = -e^2$, temos que o ponto de tangência tem de coordenadas $\left(-1\ ,\ -e^2\right)$.

Assim, substituindo as coordenadas na equação $y = 2e^2 x + b$, temos:

$-e^2 = 2e^2 \times (-1) + b \Leftrightarrow -e^2 = -2e^2 + b \Leftrightarrow -e^2 + 2e^2 = b \Leftrightarrow b = e^2$.

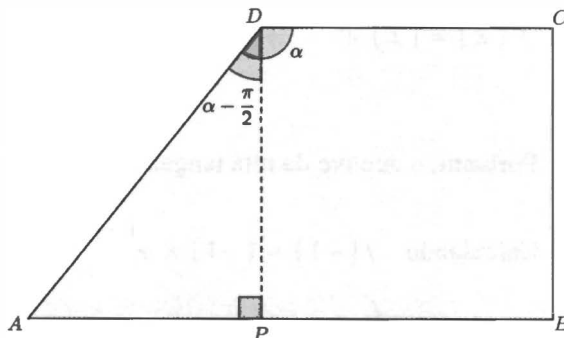
Por conseguinte, a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1 é:

$y = 2e^2 x + e^2$

6.

6.1.

Considerando um ponto P sobre o lado $[AB]$, tal que $[DP]$ é perpendicular ao lado $[AB]$, temos que:

- $\overline{DP} = 1$ e $\overline{PB} = 1$
- $P_{[ABCD]} = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$
- $A\hat{D}P = \alpha - \frac{\pi}{2}$

Então,

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \Leftrightarrow \overline{AP} = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

e

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Assim, o perímetro do trapézio é dado por:

$$P_{[ABCD]} = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} =$$

$$= 3 - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Ou seja, $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1.ª derivada

6.2.

Começamos por determinar a derivada da função P:

$$P'(\alpha) = \left(3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)' = (3)' + \frac{(1 - \cos\alpha)' \times \operatorname{sen}\alpha - (1 - \cos\alpha) \times (\operatorname{sen}\alpha)'}{\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha \times \operatorname{sen}\alpha - (1 - \cos\alpha) \times (\cos\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Assim, $P'(\theta) = \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$.

Como $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, temos:

$$\left(-\sqrt{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3}$$

Como $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$

Também sabemos que: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, logo, $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{8}{9}$.

Assim, temos que: $P'(\theta) = \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \dfrac{3}{2}$

FIM

GRUPO I

1.

Selecionadas 4 das 7 posições para a posição das letras a e depois 1 das restantes 3 posições para a posição do número "2", as restantes 2 posições serão preenchidas com números "5".

Assim, existem ${}^{7}C_4 \times 3 = 105$ códigos diferentes nas condições do enunciado.

Resposta correta: (**A**)

2.

De acordo com a informação do enunciado relativa ao valor médio, sabemos que:

$$0 \times b^3 + 1 \times a + 2 \times 2a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow a + 4a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow 5a = \frac{35}{24} \Leftrightarrow a = \frac{7}{24}$$

Como a soma das probabilidades tem que ser 1:

$$b^3 + a + 2a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3a = 1 \Leftrightarrow b^3 + 3 \times \left(\frac{7}{24}\right) = 1 \Leftrightarrow b^3 = 1 - \frac{21}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^3 = \frac{3}{24} \Leftrightarrow b^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Resposta correta: (**C**)

3.

A linha do triângulo de Pascal em causa é composta pelos elementos do tipo ${}^{111}C_k$ e sabemos que a linha tem 112 elementos.

Analisando os primeiros elementos da linha, ${}^{111}C_0 = 1$, ${}^{111}C_1 = 111$, ${}^{111}C_2 = 6105$ e ${}^{111}C_3 = 221815$, é possível concluir que apenas os três primeiros são inferiores a 10^5, pelo que também os três últimos serão inferiores a 10^5.

Assim, existem 6 números inferiores a 10^5 num total de 112, pelo que existem $112 - 6 = 106$ elementos que são maiores. Ou seja, a probabilidade solicitada é $\frac{106}{112} = \frac{53}{56}$.

Resposta correta: (**B**)

Probabilidades

Combinatória

Distribuições de probabilidades

Triângulo de Pascal

Funções

Limite segundo Heine

4.

Como (x_n) é uma sucessão de termos em $]-1\ ,\ 1[$ e $\lim(x_n) = 1$, sabemos que os termos da sucessão são inferiores a 1, pelo que $\lim\left(f(x_n)\right) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

Logo, pela observação do gráfico é possível afirmar que $\lim\left(f(x_n)\right) = +\infty$.

Resposta correta: (**A**)

1.ª derivada

5.

Sabemos que o declive, m, da reta tangente ao gráfico de uma função é dado pelo valor da sua derivada no ponto de tangência.

Como $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x}{3}+2\right)'}{\left(\dfrac{x}{3}+2\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{x+6}{3}} = \dfrac{1}{x+6}$

Temos que $m = f'(a) = \dfrac{1}{a+6}$

Também sabemos que o declive de uma reta é dado pela tangente da sua inclinação, α, pelo que $m = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Logo, $m = f'(a) \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+6} = 1 \Leftrightarrow 1 = a + 6 \wedge a \neq -6 \Leftrightarrow a = -5$.

Resposta correta: (**D**)

Assíntotas

6.

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f;

Como $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x) - 2x\right) = 1$, então a reta de declive 2 e ordenada na origem 1 também é assíntota do gráfico de f. Logo, a reta de equação $y = 2x + 1$ é outra assíntota do gráfico da função.

Assim, $x = 1$ e $y = 2x + 1$ são equações de duas das assíntotas do gráfico de f.

Resposta correta: (**B**)

7.

$$z_1 \times \overline{z_2} = (2+i)\left(\overline{3-ki}\right) = (2+i)(3+ki) = 6 + 2ki + 3i + ki^2 = 6 - k + i(2k+3)$$

Para que $z_1 \times \overline{z_2}$ seja um imaginário puro, $6 - k = 0$.

Ou seja, $k = 6$.

Resposta correta: (**D**)

N.ºs complexos

Operações

8.

Seja z o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto A e w o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto F.

Assim, $z = 3cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Como o polígono tem nove lados, $\arg(w) = \arg(z) + 2\pi \times \frac{5}{9}$

Logo, $\arg(w) = \arg(z) + \frac{10\pi}{9} = -\frac{\pi}{2} + \frac{10\pi}{9} = \frac{11\pi}{18}$

Como $|w| = |z| = 3$, temos que: $w = 3cis\left(\frac{11\pi}{18}\right)$.

Resposta correta: (**B**)

Potências e raízes

GRUPO II

N.^{os} complexos

Operações

1.

1.1.

Temos que:

$$i^{4n-6} = i^{4n-8+2} = i^{4n-8} \times i^2 = \left(i^4\right)^{n-2} \times i^2 = (1)^{n-2} \times (-1) = -1$$

Assim,

$$\frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sqrt{3} \times (-1) + 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - i}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)} =$$

$$= \frac{-i}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}cis\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}cis\left(\frac{13\pi}{10}\right)$$

1.2.

Dado que $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$, temos:

$$z_1 + z_2 = \left(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\right) + \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha + i\left(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\right)$$

Assim, como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, então:

- $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$, consequentemente $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha > 0 \Leftrightarrow Im\left(z_1 + z_2\right) > 0$;
- $\operatorname{sen}\alpha > \cos\alpha$ logo $\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha < 0 \Leftrightarrow Re\left(z_1 + z_2\right) < 0$.

Como $Re\left(z_1 + z_2\right) < 0$ e $Im\left(z_1 + z_2\right) > 0$, a imagem geométrica de $z_1 + z_2$ pertence ao segundo quadrante.

2.

2.1.

Como a experiência "Analisar um pacote de açúcar" se repete dez vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X: "Número de pacotes de açúcar em condições de serem comercializados", segue o modelo binomial $\left(P(X = k) = {}^{n}C_k \times p^k \times q^{n-k}\right)$.

Considerando como sucesso o acontecimento A: "Pacote de açúcar estar em condições de ser comercializado", a respetiva probabilidade é:

$$p = P(A) = P(5{,}7 < Y < 7{,}3) = P(6{,}5 - 2 \times 0{,}4 < Y < 6{,}5 + 2 \times 0{,}4) \approx 0{,}9545$$

Logo,

$$q = P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \approx 1 - 0{,}9545 \approx 0{,}0455$$

Assim, temos $n = 10$, $k = 8$, $p \approx 0{,}9545$ e $q \approx 0{,}0455$, pelo que:

$$P(X = 8) = {}^{10}C_8 \times (0{,}9545)^8 \times (0{,}0455)^2 \approx 0{,}064$$

Combinatória

2.2.

A resposta I considera que o número de grupos diferentes, formados de modo a que pelo menos uma das duas irmãs não seja escolhida, corresponde ao número total de grupos que se podem formar, com exceção daqueles em que ambas as irmãs estão presentes.

A resposta I representa precisamente essa diferença entre a totalidade de grupos diferentes de 30 funcionários que se podem formar de entre os 500 existentes $\left({}^{500}C_{30}\right)$, e o número de grupos diferentes que se podem formar, nos quais as duas irmãs estão incluídas $\left({}^{498}C_{28}\right)$.

Na resposta II, $2 \times {}^{498}C_{29}$ representa o número de grupos diferentes que se podem formar nos quais uma das irmãs está presente. ${}^{498}C_{30}$ representa o número de grupos diferentes formados por funcionários, excluindo qualquer uma das duas irmãs. Assim, $2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$ representa, igualmente, o número de grupos diferentes nos quais pelo menos uma das duas irmãs não pertence ao grupo.

Axiomática

3.

$$P\left(\overline{A \cap B} \middle| B\right) + P(A|B) = 1 \Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{A \cap B} \cap B\right)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P\left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap B\right)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right)\right)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

Como se queria demonstrar.

Funções

Limites

4.1.

$f(0) = 1 - e^{k+1}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{x} = -4 \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x}$$

Seja $4x = y$. Quando $x \to 0^+$, $y \to 0^+$, pelo que:

$$-4 \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x} = -4 \lim_{y \to 0^+} \frac{e^{y} - 1}{y} = -4 \times 1 = -4 .$$

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, então:

$$-4 = 1 - e^{k+1} \Leftrightarrow e^{k+1} = 5 \Leftrightarrow k + 1 = \ln 5 \Leftrightarrow k = -1 + \ln 5$$

Assíntotas

4.2.

A função é contínua no intervalo $]-\infty , 0[$ por ser o quociente entre duas funções contínuas: função seno e uma função irracional.

Da mesma forma, a função é também contínua no intervalo $]0 , +\infty[$ uma vez que se trata do quociente entre uma função exponencial e a função identidade, ambas contínuas no seu domínio.

Assim, como a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, só poderão existir assíntotas verticais em $x = 0$.

Ora, como vimos na questão anterior, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -4$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} \times \frac{1 + \sqrt{1 - x^3}}{1 + \sqrt{1 - x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x \times \left(1 + \sqrt{1 - x^3}\right)}{1 - \left(\sqrt{1 - x^3}\right)^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x \times \left(1 + \sqrt{1 - x^3}\right)}{1 - 1 + x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + \sqrt{1 - x^3}}{x^2} =$$

$$= 1 \times \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Assim sendo, $x = 0$ é assíntota vertical unilateral à esquerda do gráfico da função f.

2.ª derivada

4.3.

Para estudar o sentido da concavidade e a existência de pontos de inflexão no gráfico da função g, determinemos a expressão da segunda derivada:

$$g'(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{-1 + e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{4x} - 1}{x} = \frac{-e^{4x}}{x}$$

$$g''(x) = \frac{-4e^{4x} \times x + e^{4x}}{x^2} = \frac{e^{4x}(-4x+1)}{x^2}$$

Calculemos os zeros da segunda derivada:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}(-4x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{4x}(-4x+1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{4x} = 0}_{\textit{equação impossível}} \vee -4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Assim, estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, temos:

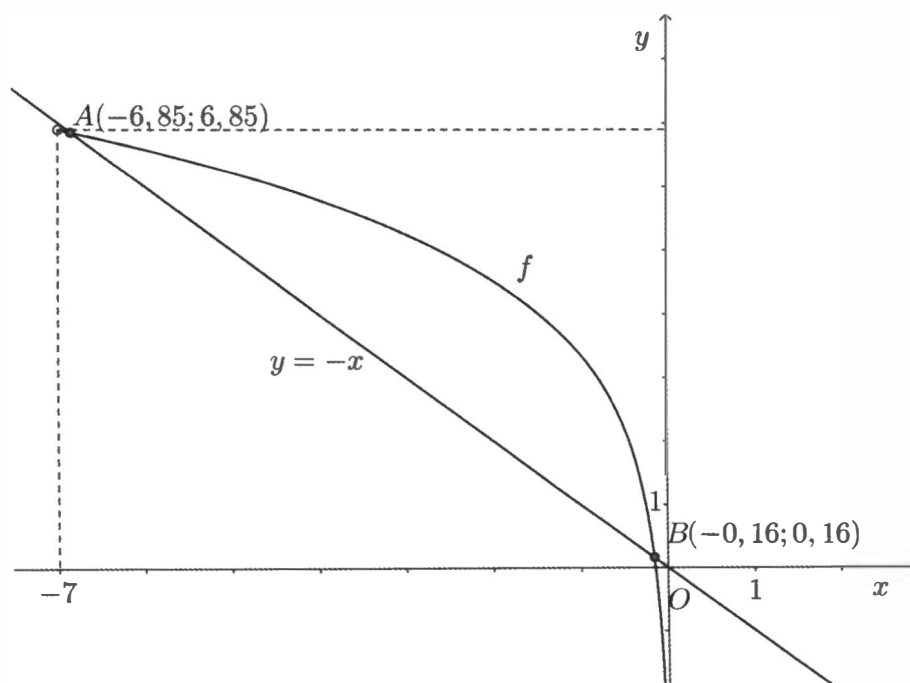
x	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g''(x)$	n. d.	$+$	0	$-$
$g(x)$	n. d.	$\cup$	P.I	$\cap$

Podemos então concluir que o gráfico da função g tem:

- um ponto de inflexão para $x = \frac{1}{4}$.
- a concavidade voltada para cima em $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$.
- a concavidade voltada para baixo em $x \in \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

Resolução gráfica

5.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, representamos, numa janela adequada, a curva correspondente à função f e a reta de equação $y = -x$ (bissetriz dos quadrantes pares). Assim, podemos encontrar as coordenadas dos pontos A e B (pontos de intersecção da função f e da reta de equação $y = -x$).

Calculando a distância entre os pontos A e B, vem que:

$$d = \sqrt{\left(-0{,}16 - (-6{,}85)\right)^2 + \left(0{,}16 - 6{,}85\right)^2} \approx 9{,}46 \; u.c.$$

Funções

6.

6.1.

Funcões trigonométricas

Os triângulos $[ABE]$, $[BCF]$, $[CDG]$ e $[DAH]$ são geometricamente iguais ou congruentes, por terem os lados correspondentes geometricamente iguais.

Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{ME}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{ME}}{2} \Leftrightarrow \overline{ME} = 2\operatorname{tg} x$$

$$A_{[ABE]} = \frac{4 \times 2\operatorname{tg} x}{2} = 4\operatorname{tg} x$$

A área sombreada é dada pela diferença entre a área total do quadrado (16) e a soma das áreas dos quatro triângulos não sombreados. Assim,

$a(x) = 16 - 4 \times 4\operatorname{tg} x \Leftrightarrow a(x) = 16 - 16\operatorname{tg} x \Leftrightarrow a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

Como se queria demonstrar.

Teorema de Bolzano

6.2.

A função a é contínua em $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right[$, pelo que também o será em $\left[\frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{5}\right]$.

Como $a\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 11{,}71$ e $a\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 4{,}38$, e como $11{,}71 > 5 > 4{,}38$, então, pelo teorema de Bolzano, existe pelo menos um $x \in \left]\frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{5}\right[$, tal que $a(x) = 5$.

FIM

GRUPO I

Probabilidades

Combinatória

1.

Para constituir um número capicua de seis algarismos, há 9 hipóteses para preencher as centenas de milhar, o zero está excluído, enquanto que para as dezenas de milhar e os milhares qualquer um dos 10 algarismos existentes serve. Por ser capicua, não há liberdade de escolha para as centenas, as dezenas e as unidades, se já tiverem sido selecionados os três algarismos iniciais. Sendo assim, há $9 \times {}^{10}A'_2 = 9 \times 10^2 = 900$ números capicuas com seis algarismos.

Resposta correta: (**B**)

Distribuições de probabilidades

2.

Comecemos por determinar o valor a atribuir à variável a de forma a satisfazer as condições dadas.

Se $P\left(X = 0 \vee X = 1\right) = 0{,}81$, então $2a + a = 0{,}81$.

Assim, $2a + a = 0{,}81 \Leftrightarrow 3a = 0{,}81 \Leftrightarrow a = \dfrac{0{,}81}{3} \Leftrightarrow a = 0{,}27$

Como $1 - 3a = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$ e $2a = 2 \times 0{,}27 = 0{,}54$,

podemos concluir que: $\mu = -1 \times 0{,}19 + 0 \times 0{,}54 + 1 \times 0{,}27 = 0{,}08$

Resposta correta: (**C**)

Probabilidades

3.

Para o produto ser zero, a bola retirada do saco terá que ser a que contém o número 0.

Assim, P ("sair bola com o número 0") $= \dfrac{1}{5}$

Resposta correta: (**D**)

Funções

2.ª derivada

4.

No intervalo em que $h''(x) < 0$, o sentido da concavidade do gráfico de h é voltado para baixo.

No intervalo em que $h''(x) > 0$, o sentido da concavidade do gráfico de h é voltado para cima.

Como o zero de $h''(x)$ está associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, nesse valor existe um ponto de inflexão do gráfico da função h.

Das quatro representações gráficas apresentadas, a única que pode representar o gráfico da função h é a da opção (A).

Resposta correta: (**A**)

Assíntotas

5.

A assíntota horizontal do gráfico de g será do tipo $y = b$, onde:

$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} - 3}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - 3\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)} = \frac{e^{-\infty} - 3}{3} = \frac{0 - 3}{3} = -1$$

Logo, a assíntota horizontal do gráfico da função g tem de equação $y = -1$.

Resposta correta: (**D**)

Logaritmos

6.

Temos que:

$$\log_a \sqrt{b \times c} = \log_a\left(\sqrt{b} \times \sqrt{c}\right) = \log_a \sqrt{b} + \log_a \sqrt{c} = \log_a b^{\frac{1}{2}} + 3 =$$

$$= \frac{1}{2} \log_a b + 3 = \frac{c}{2} + 3$$

Resposta correta: (**C**)

N.os complexos

Operações

7.

$z = 1 + i$

$w = (k - 1) + 2pi^{11} = (k - 1) + 2pi^3 = (k - 1) - 2pi$

Nota: $i^{11} = i^{4 \times 2 + 3} = i^3$ e $i^3 = -i$

Como z e w são inversos um do outro, então:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Assim,

$$\begin{cases} k - 1 = \frac{1}{2} \\ -2p = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} + 1 \\ p = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ p = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Então,

$$k + p = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Resposta correta: (**D**)

Conjuntos e condições

8.

Se aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo assinalado na figura a sombreado,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\text{Im}(z_1)\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{Im}(z_1)\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{Im}(z_1)\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

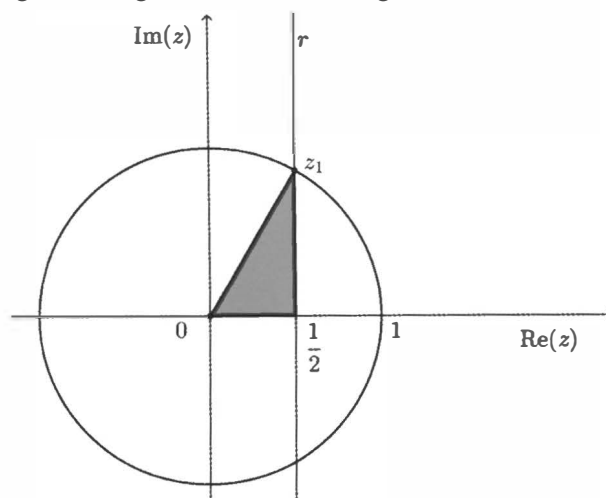
$$\Leftrightarrow \underbrace{\text{Im}(z_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{impossível } (z_1 \in 1.^{\circ}\text{ Q})} \vee \text{Im}(z_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta correta: (**B**)

N.os complexos

Potências e raízes

GRUPO II

1.

1.1.

Consideremos $z = \rho\, cis\theta$

Na forma trigonométrica: $\rho = |z| = \sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2 + (-8)^2} = \sqrt{64 \times 3 + 64} = \sqrt{256} = 16$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-8}{16} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{8\sqrt{3}}{16} \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta \in 4.^{\text{o}}\text{ Q.} \end{array}\right\}, \text{ então } \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ (por exemplo)}$$

Assim, $z = 16cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Determine-se as raízes de índice 4 de z:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt[4]{16}\ cis\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2 \text{ e } 3$$

$$= 2cis\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2 \text{ e } 3$$

pelo que temos:

$$z_1 = 2cis\left(-\frac{\pi}{24}\right)$$

$$z_2 = 2cis\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}\right) = 2cis\left(\frac{11\pi}{24}\right)$$

$$z_3 = 2cis\left(-\frac{\pi}{24} + \pi\right) = 2cis\left(\frac{23\pi}{24}\right)$$

$$z_4 = 2cis\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{3\pi}{2}\right) = 2cis\left(\frac{35\pi}{24}\right)$$

Conjuntos, condições e demonstrações

1.2.

Seja $w = a + bi$ um qualquer número complexo não nulo.

Então,

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{w} \Leftrightarrow \overline{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow a - bi = \frac{1}{2(a+bi)} \Leftrightarrow a - bi = \frac{1}{2a + 2bi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - bi)(2a + 2bi) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 2abi - 2abi - 2b^2i^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 = 1 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

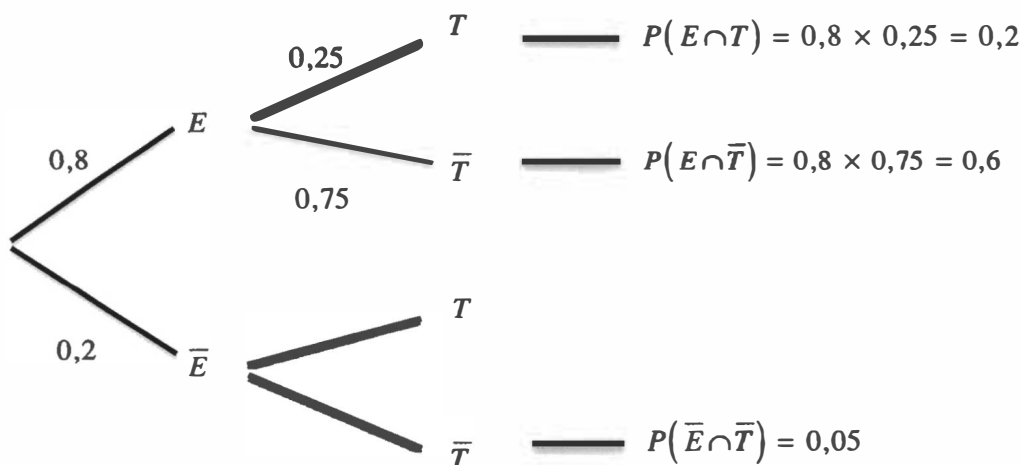
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pelo que $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Deste modo, a imagem geométrica de w pertence à circunferência de centro na origem e raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.

Probabilidades

Consideremos o seguinte diagrama, em que E é o acontecimento "apostar no euromilhões", $\overline{E}$ é o acontecimento "não apostar no euromilhões", T é o acontecimento "apostar no totoloto" e $\overline{T}$ é o acontecimento "não apostar no totoloto":

2.1.

Probabilidade condicionada

Como $P(\overline{E} \cap \overline{T}) = 0{,}05$ e $P(\overline{E} \cap T) = 1 - (P(E) + P(\overline{E} \cap \overline{T})) = 1 - (0{,}8 + 0{,}05) = 0{,}15$

Então $P(T) = P(E \cap T) + P(\overline{E} \cap T) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$.

2.2.

Sabemos que 80% dos funcionários apostam no euromilhões.

Como $0{,}8 \times 50 = 40$, são 40 os funcionários que apostam no euromilhões.

Usando a lei de Laplace para determinar a probabilidade pedida:

O número de casos possíveis é dado por ${}^{50}C_8$.

O número de casos favoráveis:

- de 8 funcionários, 7 apostarem no euromilhões é dado por ${}^{40}C_7 \times {}^{10}C_1$
- de 8 funcionários, 8 apostarem no euromilhões é dado por ${}^{40}C_8$

Assim, a probabilidade pedida é dada por $\dfrac{{}^{40}C_7 \times {}^{10}C_1 + {}^{40}C_8}{{}^{50}C_8} \approx 0{,}49$.

Axiomática

3.

A e B são dois acontecimentos independentes. Pretende-se provar que:

$P(\overline{A}\cap B) + P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A})$.

A e B serem independentes significa, por definição, que $P(A) \times P(B) = P(A\cap B)$.

Comecemos por demonstrar que se A e B são independentes, então permanecem independentes os seus respetivos acontecimentos complementares, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Ora,

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) =$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)) =$$

$$= 1 - P(A) - (P(B) - P(A) \times P(B)) =$$

$$= P(\overline{A}) - (P(B) \times (1 - P(A))) =$$

$$= P(\overline{A}) - P(B) \times P(\overline{A}) = P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$$

Portanto, fica provado que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são independentes quando os acontecimentos A e B o são.

Posto isto, demonstremos a igualdade pedida. Consideremos o primeiro membro da igualdade e façamos:

$$P(\overline{A}\cap B) + P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A}\cap B) + P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B) + P(\overline{A}\cap\overline{B}),$$

usando o facto de $\overline{A}$ e $\overline{B}$ serem independentes.

Continuando e, uma vez que $\overline{A}\cap B$ e $\overline{A}\cap\overline{B}$ são disjuntos, por um dos axiomas de Kolmogorov, $P(\overline{A}\cap B) + P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P((\overline{A}\cap B) \cup (\overline{A}\cap\overline{B})) = P(\overline{A}\cap (B\cup\overline{B}))$, tendo posto em evidência $\overline{A}$.

Mas,

$P(\overline{A}\cap (B\cup\overline{B})) = P(\overline{A}\cap E) = P(\overline{A})$, sendo E o espaço de resultados.

Logo, ficou provado que:

$P(\overline{A}\cap B) + P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A})$.

Funções

4.

Teorema de Bolzano

4.1.

$C(t) = 0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}$ define uma função real de variável real que é contínua no seu domínio, por se tratar de um produto entre uma função polinomial e uma função exponencial, em particular é contínua em $[0, 15]$.

Como

$C(0) = 0{,}5 \times 0^2 \times e^{-0{,}1 \times 0} = 0$ e $C(15) = 0{,}5 \times 15^2 \times e^{-0{,}1 \times 15} \approx 25{,}102$

podemos concluir, pelo teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, nos primeiros 15 minutos, em que a concentração foi 13 gramas por litro, uma vez que $C(0) < 13 < C(15)$.

1.ª derivada

4.2.

Comecemos por determinar a expressão da função derivada,

$$C'(t) = 2 \times 0{,}5t \times e^{-0{,}1t} + 0{,}5t^2 \times (-0{,}1) \times e^{-0{,}1t} =$$

$$= t \times e^{-0{,}1t} - 0{,}05t^2 e^{-0{,}1t} = e^{-0{,}1t}\left(t - 0{,}05t^2\right)$$

Calculando os zeros da função derivada, temos:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0{,}1t}\left(t - 0{,}05t^2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0{,}1t} = 0}_{\text{impossível}} \vee t - 0{,}05t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\,(1 - 0{,}05t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 1 - 0{,}05t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{0{,}05} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 20$$

Recorrendo a um quadro que relaciona o sinal da função derivada com a monotonia da função:

t	0		20	$+\infty$
$C'(t)$	0	+	0	−
$C(t)$	0	↗	$C(20)$	↘

A concentração desse produto será máxima para $t = 20$.

Continuidade

5.

5.1.

Para que a função g seja contínua, tem que ser contínua para $x = 0$, ou seja, $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$.

- $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{x}{x} + \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right) =$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{x}{x}\right) + \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -1 + \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}_{\lim_{y \to 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 1} = -1 + \frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

- $g(0) = e^k - 1$

Assim, $e^k - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = -\frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

Funções trigonométricas e 1.ª derivada

5.2.

Como $f'(x)=\left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=-1+\left(\frac{x}{2}\right)'\times\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, temos:

$$2f'(x)=\left(f(x)+x\right)^2-1\Leftrightarrow 2\times\left(-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+x\right)^2-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)-2=0$$

Aplicando a fórmula resolvente de equações do segundo grau:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}\Leftrightarrow\underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-2}_{\text{equação impossível}}\vee\cos\left(\frac{x}{2}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{2}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{2}=0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Se $k=0$, então $x=0$;

Se $k=1$, então $x=4\pi$;

As soluções da equação $2f'(x)=\left(f(x)+x\right)^2-1$, em $]-2\pi\ ,\ 5\pi[$, são 0 e 4π.

Funções, 1.ª derivada e 2.ª derivada

6.

A opção que pode representar uma parte da função h é a opção I.

- Podemos rejeitar a opção II porque, como $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=1$, a função h admite como assíntota horizontal a reta $y=1$ e não a reta $y=-1$.
- Rejeita-se a opção III porque sabemos que a função h tem um mínimo relativo em $]a\ ,\ c[$ e a representação gráfica nesta opção mostra uma função crescente, não existindo mínimo no referido intervalo.
- Rejeita-se a opção IV porque sabemos que $h''(x)>0$ para $x>b$, ou seja, no intervalo $]b\ ,\ +\infty[$ a representação gráfica da função h tem a concavidade voltada para cima, o que não acontece com a representação gráfica da função desta opção.

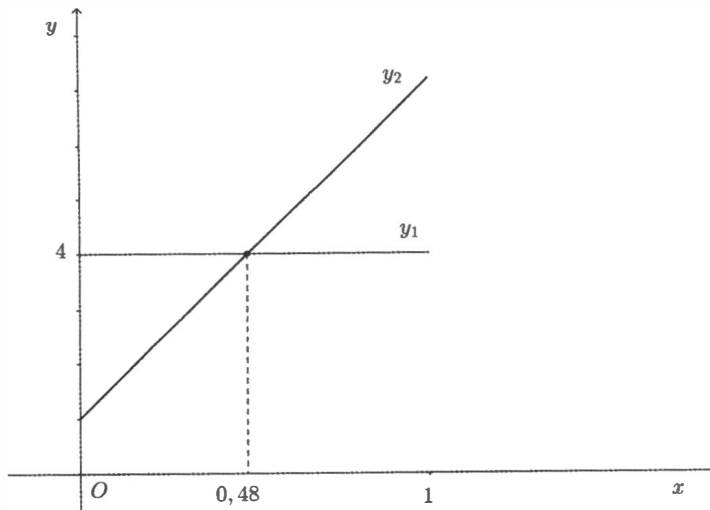
Resolução gráfica

7.

O ponto P será da forma $P(x\ ,\ f(x))$. Como a distância do ponto P à origem é 2, então:

$$\overline{OP}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+\left(f(x)-0\right)^2}=2 \Leftrightarrow (x-0)^2+\left(f(x)-0\right)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(e^{0,1x}+\ln(3x+1)\right)^2=4$$

Assim, visualizando na calculadora o gráfico das funções $y_1=4$ e $y_2=x^2+\left(e^{0,1x}+\ln(3x+1)\right)^2$, numa janela coerente com o domínio da função $([0\ ,\ 1]\times[0\ ,\ 8])$ (reproduzido na figura seguinte) e determinando a intersecção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto: $P(0{,}48\ ;\ 4)$.

Ou seja, o valor aproximado às centésimas da abcissa do ponto P é $0{,}48$.

FIM

GRUPO I

1.

Como a comissão deve ter exatamente duas mulheres, num total de três pessoas, esta será constituída por um único homem.

Logo, como existem seis homens no grupo, existem seis formas distintas de escolher o homem que integra a comissão.

Por cada uma das seis escolhas anteriores, existem ${}^{3}C_{2}$ formas de escolher duas de entre as três mulheres que existem no grupo (não se considera a ordem relevante, porque não existe referência a diferentes estatutos na comissão).

Assim, de acordo com a restrição imposta, existem $6 \times {}^{3}C_{2}$ formas de escolher os elementos da comissão.

Resposta correta: (**B**)

2.

Uma vez que: $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = b + b = 2b$ e
$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = a + 2a = 3a$, então
$P(X > 1) = P(X < 2) \Leftrightarrow 2b = 3a \Leftrightarrow b = \frac{3a}{2}$.

Como a soma de todas as probabilidades é um, temos: $a + 2a + b + b = 1 \Leftrightarrow 3a + 2b = 1$

Logo, podemos calcular os valores de a e de b:

$$\begin{cases} b = \frac{3a}{2} \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3a}{2} \\ 3a + 2 \times \frac{3a}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3a}{2} \\ 3a + 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3a}{2} \\ 6a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \times \frac{1}{6} \\ a = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{12} \\ a = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Assim, calculando o valor médio da variável aleatória X, vem:

$\mu = 0 \times a + 1 \times 2a + 2 \times b + 3 \times b = 2a + 5b$

Substituindo os valores de a e de b obtemos:

$\mu = 2 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$

Resposta correta: (**D**)

Distribuição normal

3.

Sabe-se que 11 é o valor médio, μ, de uma distribuição normal da qual o desvio padrão, σ, é um número natural em que $P(X > 23) \approx 0{,}02275$.

Como numa distribuição normal

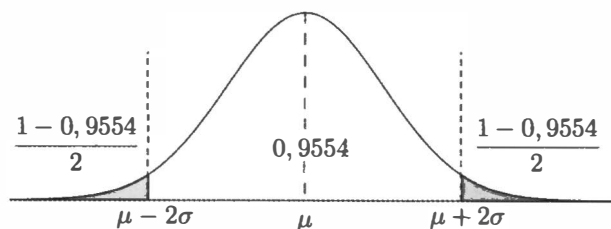
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

e $\dfrac{1 - 0{,}9545}{2} = 0{,}02275$, então

$P(X > \mu + 2\sigma) \approx 0{,}02275$.

Assim, $\mu + 2\sigma = 23$.

Dado que $\mu = 11$ temos: $11 + 2\sigma = 23 \Leftrightarrow 2\sigma = 12 \Leftrightarrow \sigma = 6$.

Resposta correta: (**C**)

Funções

Limite segundo Heine

4.

Como $\lim\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0^+$, então $\lim f(x_n) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Sendo $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, vem que:

$$\lim f(x_n) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} = \lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) = -\underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\textit{limite notável}} = -1$$

Resposta correta: (**A**)

Assíntotas

5.

Sabendo que $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, em que m é o declive de uma assíntota do gráfico de f, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x) + f(x)}{3x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{3x} + \frac{f(x)}{3x}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{3x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{3x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{3}\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + \frac{1}{3}\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

Logo, uma assíntota do gráfico de f, se existir, é uma reta de declive 3, pelo que a única equação, de entre as hipóteses apresentadas, que pode definir uma assíntota do gráfico da função f é $y = 3x$.

Resposta correta: (**D**)

Funções exponenciais e 1.ª derivada

6.

Como:

- $f(0) = a^0 = 1$ e $g(0) = a^{-0} = a^0 = 1$, o ponto $P(0\,,\,1)$ pertence aos gráficos das duas funções, pelo que a afirmação I é falsa;
- para $a > 1$ a função $g(x) = a^{-x}$ é estritamente decrescente, então também a afirmação II é falsa;
- $f'(x) = \left(a^x\right)' = a^x \ln(a)$, então $f'(-1) = a^{-1}\ln(a) = \frac{1}{a}\ln(a) = \frac{\ln(a)}{a}$ e como

  $g'(x) = \left(a^{-x}\right)' = -a^{-x}\ln(a)$, então $g'(1) = -a^{-1}\ln(a) = -\frac{1}{a}\ln(a) = -\frac{\ln(a)}{a}$.

  Assim, $f'(-1) - g'(1) = \frac{\ln(a)}{a} - \left(-\frac{\ln(a)}{a}\right) = \frac{\ln(a)}{a} + \frac{\ln(a)}{a} = \frac{2\ln(a)}{a}$, pelo que a afirmação III é verdadeira.

Resposta correta: (**B**)

N.ºs complexos

7.

Operações

$$i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2} = \left(i^4\right)^{2n} \times \left(i^4\right)^{2n} \times i^{-1} + \left(i^4\right)^{2n} \times i^{-2} =$$

$$= 1^{2n} \times 1^{2n} \times (-i) + 1^{2n} \times (-1) = -i - 1$$

Uma vez que:

$i^4 = 1$; $\quad i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i \quad$ e $\quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$.

Portanto, $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2} = -i - 1$ é um número complexo cuja representação geométrica pertence ao 3.º quadrante, e de entre as opções apresentadas, w_3, é o único número complexo com representação geométrica neste quadrante.

Resposta correta: (**C**)

8.

Operações

Como $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ e $\arg(z) = \alpha$, então $z = 10cis(\alpha)$.

Assim, temos que:

$$w = \frac{-i \times z^2}{\bar{z}} = \frac{-i \times \left(10^2 cis(2\alpha)\right)}{10cis(-\alpha)} = -i \times \left(10cis(2\alpha - (-\alpha))\right) =$$

$$= cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \left(10cis(3\alpha)\right) = 10cis\left(-\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) = 10cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Resposta correta: (**A**)

GRUPO II

N.os complexos

1.

1.1.

Potências e raízes

Escrevendo z_1 e z_2 na forma trigonométrica, temos:

$$z_1 = \sqrt{2} + 2cis\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = \sqrt{2}\,i = \sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{2}$$

$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{4}$, pois

- $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\text{tg}\theta = 1$ e $\theta \in 1.^{\text{o}}$ Q. , logo $\theta = \frac{\pi}{4}$ (argumento positivo mínimo).

Assim,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{4}} = cis\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = cis\frac{\pi}{4}$$

Como $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de w, aplicando a fórmula de Moivre e escrevendo w na forma algébrica, obtemos:

$$w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 = \left(cis\frac{\pi}{4}\right)^4 = 1^4\,cis\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = cis\,\pi = -1$$

Operações

1.2.

Sabendo que $\overline{z_2} = 1 - i$ e $z_3 = cis\alpha$, vem

$$z_3 + \overline{z_2} = cis\alpha + 1 - i = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + 1 - i = \cos\alpha + 1 + (\text{sen}\,\alpha - 1)i$$

Como $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real, então $Im(z_3 + \overline{z_2}) = 0$ logo $\text{sen}\,\alpha - 1 = 0$, ou seja,

$$\text{sen}\,\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left]-2\pi\ ,\ -\pi\right[$, para $k = -1$, temos $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$.

Probabilidades

Probabilidade condicionada

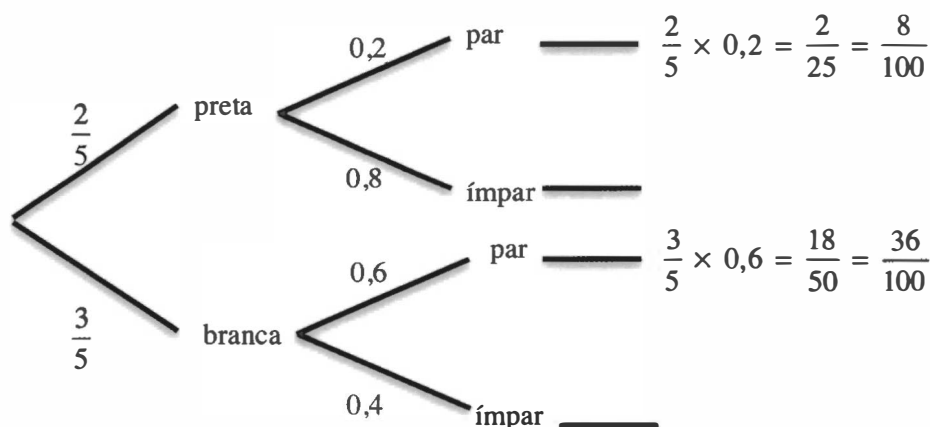
2.

2.1.

Consideremos o seguinte diagrama em que:

- **preta** é o acontecimento "a bola ser preta" e **branca** "a bola ser branca".
- **par** "a bola ter um número par" e **ímpar** "a bola ter um número ímpar".

$$\frac{2}{5}\times 0{,}2=\frac{2}{25}=\frac{8}{100}$$

$$\frac{3}{5}\times 0{,}6=\frac{18}{50}=\frac{36}{100}$$

Assim, a probabilidade pedida é:

$$P(\text{preta}|\text{par})=\frac{P(\text{preta e par})}{P(\text{par})}=\frac{\frac{8}{100}}{\frac{8}{100}+\frac{36}{100}}=\frac{8}{44}=\frac{2}{11}.$$

Probabilidades

2.2.

A probabilidade de sair uma bola branca na primeira extração é igual a $\frac{3}{5}$, segundo os dados do problema. Como a extração é efetuada sem reposição, a probabilidade de sair uma bola branca na segunda extração, sabendo que saiu bola branca na primeira extração, é dada por: $\frac{\frac{3}{5}n-1}{n-1}$.

Logo, a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é dada por: $\frac{3}{5}\times\frac{\frac{3}{5}n-1}{n-1}=\frac{\frac{9}{5}n-3}{5n-5}$.

Como se sabe que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$, tem-se:

$$\frac{\frac{9}{5}n-3}{5n-5}=\frac{7}{20}\underset{n\neq 1}{\Leftrightarrow}\left(\frac{9}{5}n-3\right)\times 20=(5n-5)\times 7\Leftrightarrow 36n-60=35n-35\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36n-35n=60-35\Leftrightarrow n=25$$

Axiomática

3.

De $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \frac{15}{16}$, temos sucessivamente que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{16}.$$

Atendendo a que $P(B) = \frac{1}{4}$, então $P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

De $P\left(A \middle| \overline{B}\right) = \frac{7}{12}$, temos sucessivamente que:

$$P\left(A \middle| \overline{B}\right) = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4 \times 3} \Leftrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{7}{16}.$$

Sabendo que $P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$, então $P(A) = \frac{1}{16} + \frac{7}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Funções

4.

4.1.

Assíntotas

A função é contínua no intervalo $]-\infty, 0[$ por ser o quociente entre duas funções contínuas. Da mesma forma, a função é contínua no intervalo $]0, +\infty[$ por ser o produto entre duas funções contínuas, então a função f é contínua no seu domínio.

Assim, como a função é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, só poderão existir assíntotas verticais em $x = 0$.

Como

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{e^{4x} - 1}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\textit{limite notável} = 1} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^{4x} - 1} = 1 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{e^{4x} - 1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{4\left(e^{4x} - 1\right)}{4x}} \underset{y = 4x}{=} \frac{1}{4 \times \underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\textit{limite notável} = 1}} = \frac{1}{4}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x \ln(x)\right) \underset{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln 1 - \ln y}{y} = - \underbrace{\lim_{y\to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\textit{limite notável} = 0} = 0$$

conclui-se que o gráfico da função f não tem assíntotas verticais.

4.2.

Como $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$, substituindo $f(x)$ por $x\ln(x)$, temos:

$g(x) = x\ln(x) - x + \ln^2 x$.

Comecemos por determinar a primeira derivada da função g:

$$g'(x) = (x\ln(x))' + (-x)' + (\ln^2 x)' = 1 \times \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 + 2\ln(x) \times \frac{1}{x} =$$

$$= \ln(x) + \frac{2}{x}\ln(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)\ln(x)$$

Calculemos os zeros de g' no intervalo $]0\,,\,e]$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{x}\right)\ln(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = 0 \vee \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1.$$

No intervalo considerado, $x = 1$ é o único zero de g'.

Estudando a variação de sinal da primeira derivada e relacionando com a monotonia da função g, vem:

x	0		1		e
$g'(x)$	n. d.	$-$	0	$+$	$1+\frac{2}{e}$
$g(x)$	n. d.	↘	-1 mín.	↗	1 máx.

Podemos então concluir que a função g:

- é decrescente em $]0\,,\,1]$ e crescente em $[1\,,\,e]$.
- tem um mínimo relativo igual a -1 para $x = 1$ e um máximo relativo igual a 1 para $x = e$.

Resolução gráfica

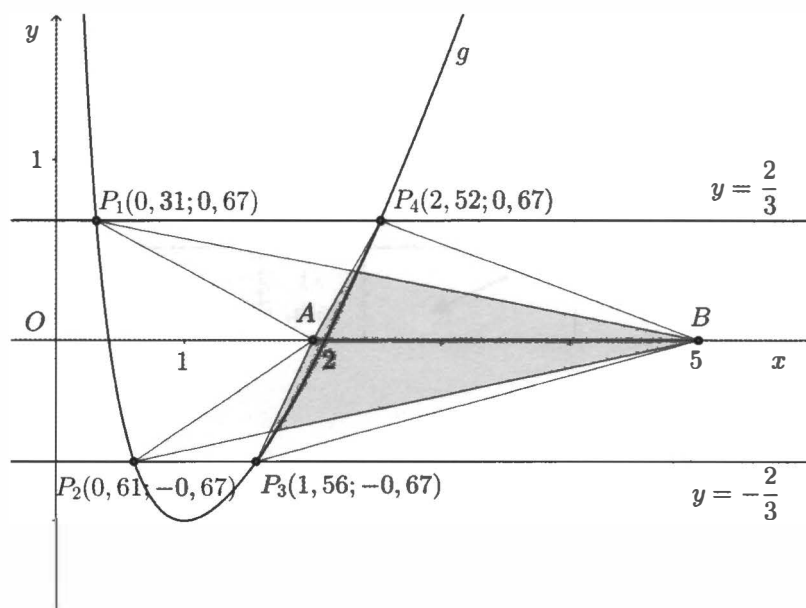
4.3.

Pretendemos os valores de $x \in \mathbb{R}^+$ para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1. Assim, temos de determinar x tal que:

$$\frac{(5-2)\times|g(x)|}{2} = 1 \Leftrightarrow |g(x)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow g(x) = \frac{2}{3} \vee g(x) = -\frac{2}{3}.$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, representamos, numa janela adequada, a curva correspondente à função g e as retas de equação $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$.

Assim, podemos encontrar as coordenadas dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 (pontos de intersecção da função g com as retas de equação $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$).

Vejamos os gráficos:

De onde verificamos que os valores aproximados das abcissas dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 são:

$x \approx 0{,}31 \vee x \approx 0{,}61 \vee x \approx 1{,}56 \vee x \approx 2{,}52$.

5.

A opção que pode representar a função g é a IV.

Observando o gráfico da função f e tendo em conta que $e^{-x} > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e relacionando o sinal da primeira derivada da função g com a monotonia da função g, temos que:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↘		↗

Na opção I, a representação gráfica não se adequa à situação descrita no ponto de abcissa -1 porque a derivada nesse ponto é negativa e, de acordo com a tabela anterior, $g'(-1) = 0$.

Rejeitamos a opção II porque apresenta um máximo relativo para $x = 2$ quando para este valor a função g tem um mínimo relativo, conforme pode ser constatado na tabela.

A opção III é rejeitada porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2 \right) = 0$, o que significa que a reta de equação $y = 2$ é assíntota do gráfico de g, e nesta representação gráfica a assíntota é a reta de equação $y = -2$.

1.ª derivada e assíntotas

6.

Como a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa a é paralela à reta de equação $y = \frac{1}{2}x + 1$, então o seu declive é igual a $\frac{1}{2}$.

Dado que a derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto, temos que determinar a tal que $g'(a) = \frac{1}{2}$.

Determinemos a expressão analítica da função derivada de g:

$g'(x) = 2\cos(2x) + \text{sen}(x)$.

Vamos, então, resolver a equação $g'(a) = \frac{1}{2}$.

$$g'(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos(2a) + \text{sen}(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(\cos^2(a) - \text{sen}^2(a)\right) + \text{sen}(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \text{sen}^2(a) - \text{sen}^2(a)\right) + \text{sen}(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 4\text{sen}^2(a) + \text{sen}(a) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -4\text{sen}^2(a) + \text{sen}(a) + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8\text{sen}^2(a) + 2\text{sen}(a) + 3 = 0$$

Considerando $b = \text{sen}(a)$, temos que:

$-8\text{sen}^2(a) + 2\text{sen}(a) + 3 = 0 \Leftrightarrow -8b^2 + 2b + 3 = 0$.

Aplicando a fórmula resolvente para equações do 2.º grau, temos:

$$-8b^2 + 2b + 3 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{-16} \Leftrightarrow b = \frac{-2 \pm 10}{-16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{12}{16} \vee b = \frac{8}{-16} \Leftrightarrow b = \frac{3}{4} \vee b = -\frac{1}{2}$$

Temos então que $\text{sen}(a) = \frac{3}{4} \vee \text{sen}(a) = -\frac{1}{2}$.

Como o domínio de g é $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, neste intervalo a função seno é negativa, pelo que a condição $\text{sen}(a) = \frac{3}{4}$ é impossível.

Assim, tem-se

$$\text{sen}(a) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(a) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Como $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, o valor de a é igual $-\frac{\pi}{6}$.

Teorema de Bolzano

7.

Consideremos a função g, definida por $g(x) = f(x) - f(x + a)$. Assim, $g(x) = 0$ é equivalente à condição dada, $f(x) = f(x + a)$.

A função g é contínua no intervalo $[-a, 0]$, por ser a diferença de duas funções contínuas nesse intervalo.

Averiguemos se $g(-a) \times g(0) < 0$.

$g(-a) = f(-a) - f(0) = f(a) - f(0)$, pois $f(-a) = f(a)$;

$g(0) = f(0) - f(a) = -f(a) + f(0) = -(f(a) - f(0))$.

Como $f(a) > f(0) \Leftrightarrow f(a) - f(0) > 0 \Leftrightarrow g(-a) > 0$,

de igual modo $g(0) = -(f(a) - f(0)) < 0$.

Assim, concluímos que $g(-a) \times g(0) < 0$.

Como a função g é contínua no intervalo $[-a, 0]$ e $g(-a) \times g(0) < 0$, pelo teorema de Bolzano, a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-a, 0[$, o que permite concluir que a condição $f(x) = f(x + a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$.

FIM

GRUPO I

1.

Combinatória

Colocar os 9 discos brancos no tabuleiro é escolher 9 dos 16 quadrados.

Haverá tantas formas diferentes de colocar os 9 discos brancos quantos os subconjuntos de 9 quadrados num total de 16, não considerando a ordem relevante porque os discos são iguais, ou seja, ${}^{16}C_9$.

Para cada forma de ocupar 9 quadrados com os discos brancos, haverá $16 - 9 = 7$ quadrados livres para colocar os 3 discos pretos. E haverá tantas formas de colocar estes 3 discos pretos quantos os subconjuntos de 3 quadrados dentre os 7 quadrados livres, ou seja, ${}^{7}C_3$.

Por isso, há ${}^{16}C_9 \times {}^{7}C_3$ maneiras diferentes de colocar os 12 discos nos 16 quadrados do tabuleiro.

Resposta correta: (**B**)

2.

Triângulo de Pascal

Como o segundo e o penúltimo números de qualquer linha do triângulo de Pascal são iguais e o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de uma linha é 484, podemos calcular o valor de ambos:

$$a \times a = 484 \Leftrightarrow a^2 = 484 \underset{a>0}{\Rightarrow} a = \sqrt{484} \Leftrightarrow a = 22$$

Assim, temos que a linha em causa tem 23 elementos da forma ${}^{22}C_n$.

Logo, só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 1000:

${}^{22}C_0 = {}^{22}C_{22}\ (= 1)$; ${}^{22}C_1 = {}^{22}C_{21}\ (= 22)$ e ainda ${}^{22}C_2 = {}^{22}C_{20}\ (= 231)$, uma vez que ${}^{22}C_3 = {}^{22}C_{19} = 1540$ e todos os restantes são superiores a estes.

Então, sabemos que existem $23 - 6 = 17$ elementos superiores a 1000 num total de 23, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{17}{23}$.

Resposta correta: (**C**)

Funções

Logaritmos

3.

Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a\left(a^5 \times \sqrt[3]{b}\right) + a^{\log_a b} = \log_a\left(a^5\right) + \log_a \sqrt[3]{b} + b = 5 + \log_a\left(b^{\frac{1}{3}}\right) + b =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\log_a b + b = 5 + \frac{1}{3} \times 3 + b = 5 + 1 + b = 6 + b$$

Resposta correta: (**A**)

Teorema de Bolzano

4.

Como a função f é contínua em $[-e\ ,\ 1]$, e $1 < \frac{e}{2} < e$, ou seja, $f(-e) < \frac{e}{2} < f(1)$, então podemos concluir, pelo teorema de Bolzano, que existe, pelo menos, um $c \in\ ]-e\ ,\ 1[$, tal que: $f(c) = \frac{e}{2}$. Logo, $f(x) = \frac{e}{2}$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e\ ,\ 1[$.

Resposta correta: (**D**)

1.ª derivada e 2.ª derivada

5.

Por ser f' uma função de domínio real, f é uma função contínua.

Como $f'(a) = 0$, $(a\ ,\ f(a))$ é um ponto notável do gráfico de f, extremo ou ponto de inflexão. Saber que $f''(a) = -2$ garante-nos que numa vizinhança de a a concavidade do gráfico de f está virada para baixo e, por isso, f admite como máximo relativo $f(a)$.

Resposta correta: (**B**)

1.ª derivada

6.

O gráfico da função f é a imagem por translação segundo o vetor $(3\ ,\ 0)$ do gráfico de g e, por isso, intersecta o eixo Ox em $x = 1$, $x = 3$ e $x = 5$, com um máximo relativo em $x \approx 2$, um ponto de inflexão em $x = 3$ e um mínimo relativo em $x \approx 4$. Dois dos gráficos apresentados para f' intersectam o eixo das abcissas em $x \approx 2$ e $x \approx 4$, mas só um deles passa de positivo (f crescente) a negativo (f decrescente) em $x \approx 2$ (máximo), e de negativo (f decrescente) a positivo (f crescente) em $x \approx 4$ (mínimo).

Resposta correta: (**A**)

7.

O conjugado do complexo z é $\overline{z} = 2 - bi$.

Como $b < 0$, então $-b > 0$. Logo $\overline{z}$ pertence ao 1.º quadrante, pois tanto a parte real como o coeficiente da parte imaginária são positivos.

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $-\alpha$ pertence ao 4.º quadrante, pelo que não poderá ser o argumento de $\overline{z}$.

Assim, são eliminadas as opções (B) e (D).

O módulo do conjugado do complexo z é: $\left|\overline{z}\right| = \sqrt{2^2 + (-b)^2}$.

Como este módulo é maior do que 2, então não poderá ser $\frac{3}{2}$, pelo que se elimina a opção (A).

Então, a única resposta possível é a (C), pois o argumento é um ângulo do 1.º quadrante e o módulo é maior do que 2.

Resposta correta: (**C**)

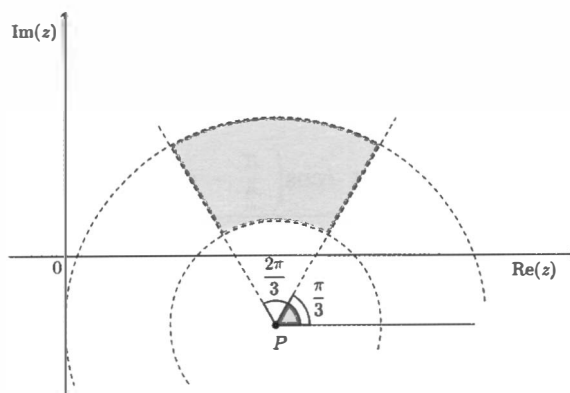
8.

Podemos reescrever a condição dada na seguinte forma:

$$\frac{3}{2} \leq |z - 3 + i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq |z - (3 - i)| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \arg(z - (3 - i)) \leq \frac{2\pi}{3}$$

Assim, sendo o ponto P a representação geométrica do número complexo $3 - i$, a condição define o conjunto de pontos do plano complexo que:

- estão a uma distância do ponto P compreendida entre $\frac{3}{2}$ e 3;
- definem com a semirreta paralela ao eixo real com origem no ponto P e que se prolonga no sentido positivo do eixo, um ângulo compreendido entre $\frac{\pi}{3} rad$ e $\frac{2\pi}{3} rad$.

Resposta correta: (**A**)

GRUPO II

N.os complexos

1.

1.1.

Potências e raízes

Escrevendo z_1 e z_2 na forma trigonométrica, temos:

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(i^4\right)^5 \times i^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right),$$

pois

- $$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

- $$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$ e $\theta \in 2.$ Q., logo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (argumento positivo mínimo).

$$z_2 = \frac{-2}{iz_1} = \frac{2cis(\pi)}{cis\left(\frac{\pi}{2}\right) \times cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2cis(\pi)}{cis\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2cis(\pi)}{cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = 2cis\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) = 2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Como $(z_2)^n = \left(2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^n = 2^n\, cis\left(-\frac{\pi}{6} \times n\right)$, então

$(z_2)^n$ é um número real negativo quando:

$$-\frac{\pi}{6} \times n = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{-6(\pi + 2k\pi)}{\pi},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -6 - 12k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Fazendo concretizações de k, obtemos $n = 6$ para $k = -1$, sendo este o menor valor natural de n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

Operações

1.2.

$$\frac{\cos(\pi - \alpha) + i\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{\cos(\pi - \alpha) + i\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{\cos(\pi - \alpha) + i\,\mathrm{sen}(\pi - \alpha)}{\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{cis(\pi - \alpha)}{cis\alpha} =$$

$$= cis(\pi - \alpha - \alpha) = cis(\pi - 2\alpha)$$

Como se queria demonstrar.

2.

Sendo B: "Sair número menor do que 3", então $\overline{B}$: "Sair número 3".

Sabe-se que $P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$.

Então,

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2P(A \cap B) = \frac{5}{9} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2P(A \cap B) = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

Sabe-se também que $P(B|A) = \frac{2}{7}$.

Então,

$$P(B|A) = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{7}}$$

Dado que $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$, temos:

$$P(A) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{7}{9}.$$

Uma vez que $A = \{1, 3\}$, e como $A \cap B = \{1\}$ e $\overline{B} = \{3\}$ são dois acontecimentos incompatíveis, então $P(A) = P(A \cap B) + P(\overline{B})$.

Pelo que $P(\overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{B}) = \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \Leftrightarrow P(\overline{B}) = \frac{5}{9}$

Assim, conclui-se que a probabilidade de sair o número 3 é $\frac{5}{9}$.

Distribuições de probabilidades

3.

3.1.

Como a probabilidade de escolher, ao acaso, um jornalista e este ser do sexo feminino é $\frac{3}{5}$ e como existem 20 jornalistas, então o número de jornalistas do sexo feminino é dado por $\frac{3}{5} \times 20 = 12$, sendo os restantes 8 do sexo masculino.

Os valores da variável aleatória Y são: 0, 1 e 2.

Assim, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	$\frac{^8C_2}{^{20}C_2} = \frac{14}{95}$	$\frac{^8C_1 \times {}^{12}C_1}{^{20}C_2} = \frac{48}{95}$	$\frac{^{12}C_2}{^{20}C_2} = \frac{33}{95}$

3.2.

Pretende-se determinar o número de maneiras diferentes de os 20 jornalistas se sentarem nas três primeiras filas, ocupando completamente a 1.ª e a 2.ª filas.

Resposta I: ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_{4}$

Existem ${}^{20}C_{16}$ maneiras diferentes de formar grupos de 16 jornalistas, de entre os 20, para ocuparem as duas primeiras filas. Para cada grupo de 16 jornalistas existem 16! maneiras de ocuparem os 16 lugares nas duas primeiras filas. Restam 4 jornalistas, que têm disponíveis 8 cadeiras na 3.ª fila. Há ${}^{8}A_{4}$ maneiras diferentes de os restantes 4 jornalistas se sentarem, ordenadamente, em 4 cadeiras de entre as 8 disponíveis.
Para cada uma das hipóteses de dispor cada grupo de 16 jornalistas nas duas primeiras filas, existem ${}^{8}A_{4}$ de sentar os restantes 4 jornalistas na 3.ª fila, pelo que, ao todo, temos ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_{4}$ formas diferentes de os 20 jornalistas se sentarem nas três primeiras filas, nas condições do enunciado.

Resposta II: ${}^{20}A_{8} \times {}^{12}A_{8} \times {}^{8}A_{4}$

Existem ${}^{20}A_{8}$ maneiras diferentes de se sentarem, ordenadamente, 8 jornalistas escolhidos entre os 20, na primeira fila. Sentados 8 jornalistas, restam 12, sendo que 8 destes deverão ocupar completamente a 2.ª fila. Existem ${}^{12}A_{8}$ formas diferentes de os 8 jornalistas, escolhidos de entre os 12, ocuparem as 8 cadeiras da 2.ª fila. Ocupadas as duas primeiras filas, restam 4 jornalistas, para os quais há ${}^{8}A_{4}$ formas diferentes de se sentarem ordenadamente em 4 cadeiras das 8 que constituem a 3.ª fila.
Assim, existem ${}^{20}A_{8}$ formas diferentes de dispor cada grupo de 8 jornalistas na primeira fila, para cada uma destas existem ${}^{12}A_{8}$ de ocupar a 2.ª fila, e para cada uma destas existem ${}^{8}A_{4}$ formas diferentes de sentar os restantes 4 jornalistas na 3.ª fila.
Portanto, ao todo, há ${}^{20}A_{8} \times {}^{12}A_{8} \times {}^{8}A_{4}$ formas diferentes de os 20 jornalistas se sentarem nas três primeiras filas, de acordo com o enunciado.

4.

4.1.

A função f é contínua em $x = 1$ se e só se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

Comecemos por calcular os limites laterais:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(xe^{3+x} + 2x\right) = e^4 + 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1 - \sqrt{x} + \operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right).$$

Atendendo a que o limite da soma é igual à soma dos limites das parcelas, quando estes existem, averiguemos se estes existem:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-\sqrt{x})}{(1-x)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} = -\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}.$$

Considerando $y = x - 1$, quando $x \to 1^+$ então $y \to 0^+$, e assim

$$-\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = -\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\textit{limite notável}} = -1.$$

Como os limites das parcelas existem, então

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-\sqrt{x} + \operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} + \lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Donde concluímos que f não é contínua em $x = 1$, porque os limites laterais são diferentes.

4.2.

O gráfico de f admite uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \to -\infty$, se existirem m e b finitos.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^{3+x} + 2x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(e^{3+x} + 2\right)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{3+x} + 2\right) = 2,$$

porque $\lim_{x \to -\infty} e^{3+x} = 0$.

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{3+x} + 2x - 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{3+x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^3}{\frac{e^{-x}}{x}}$$

Fazendo $y = -x$, vem $y \to +\infty$ quando $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^3}{\frac{e^{-x}}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^3}{\frac{-e^y}{y}} = 0 \text{, dado que } \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty .$$

O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = 2x$ quando $x \to -\infty$.

2.ª derivada

5.

Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão no gráfico de g, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de g.

$$g''(x) = \left(\ln\left(e^x + 6e^{-x} + 4x\right)\right)' = \frac{\left(e^x + 6e^{-x} + 4x\right)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x}.$$

Como $x \in \mathbb{R}^+$, então $e^x + 6e^{-x} + 4x > 0$.

Calculemos os zeros da segunda derivada de g:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 4e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -2 - \sqrt{10}}_{impossível} \vee e^x = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(-2 + \sqrt{10}\right)$$

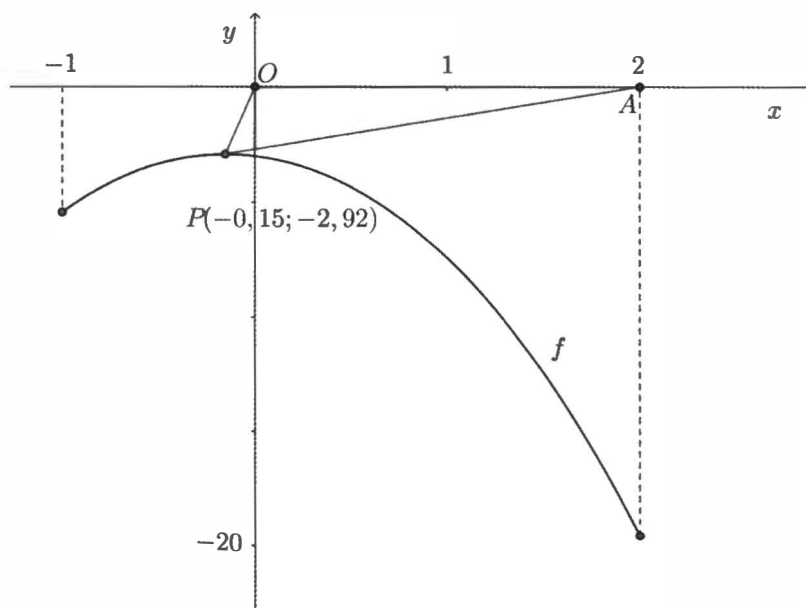
Assim, estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, temos:

x	0		$\ln\left(-2 + \sqrt{10}\right)$	$+\infty$
$g''(x)$	n. d.	$-$	0	$+$
$g(x)$	n. d.	$\cap$	P. I.	$\cup$

Podemos então concluir que o gráfico da função g tem:

- a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]0, \ln\left(-2 + \sqrt{10}\right)\right]$;
- a concavidade voltada para cima em $\left[\ln\left(-2 + \sqrt{10}\right), +\infty\right[$;
- um ponto de inflexão de abcissa $\ln\left(-2 + \sqrt{10}\right)$.

6.

Consideremos a representação gráfica de f definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, no intervalo $[-1, 2]$.

A área do triângulo $[AOP]$ é mínima quando a altura do triângulo, relativamente à base $[OA]$, for mínima, o que acontece quando a ordenada do ponto P for o máximo de f, no intervalo $[-1, 2]$.

Por observação do gráfico de f, sabemos que o seu máximo é, aproximadamente, −2,92.

Assim, porque a área do triângulo $[AOP]$ é dada por

$$A_{[AOP]} = \frac{\overline{OA} \times |f(x)|}{2} = \frac{2 \times |f(x)|}{2} = |f(x)|$$

a área mínima é 2,92.

7.

7.1.

Tendo em conta os dados da figura, tem-se que:

$P_{[AOP]} = 2\overline{OA} + \overline{AB}$, porque $\overline{OA} = \overline{OB}$

Determinemos $\overline{OA}$,

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = \frac{3}{\overline{OA}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos(\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos(\alpha)}$$

e $\overline{AC}$,

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AC}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 3\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = -3\operatorname{tg}(\alpha)$$

Pelo que, $\overline{AB} = 2 \times \left(-3\operatorname{tg}(\alpha)\right) = -6\operatorname{tg}(\alpha)$.

Assim,

$$P_{[AOP]} = \overline{AB} + 2\overline{OA} =$$

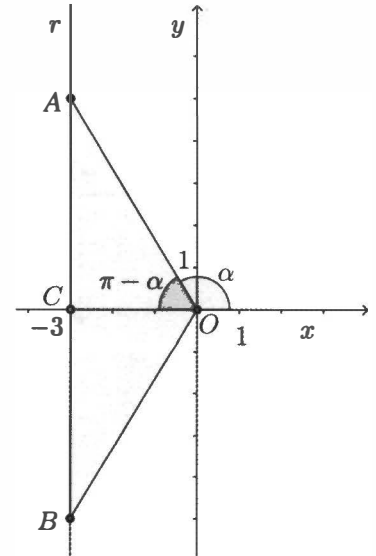
$$= -6\operatorname{tg}(\alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos(\alpha)}\right) =$$

$$= -6\operatorname{tg}(\alpha) - \frac{6}{\cos(\alpha)}$$

Então

$$P(\alpha) = -6\operatorname{tg}(\alpha) - \frac{6}{\cos(\alpha)},\ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

Como se queria demonstrar.

7.2.

1.ª derivada

O declive da reta tangente ao gráfico da função P é igual à derivada da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$.

Assim, determine-se a derivada da função P:

$$P'(x) = \left(-6\operatorname{tg}(x) - \frac{6}{\cos(x)}\right)' =$$

$$= \left(-6\operatorname{tg}(x)\right)' - \left(\frac{6}{\cos(x)}\right)' =$$

$$= -6 \times \frac{1}{\cos^2(x)} - \left(\frac{-6 \times (\cos(x))'}{\cos^2(x)}\right) =$$

$$= -6 \times \frac{1}{\cos^2(x)} - \left(\frac{-6 \times (-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)}\right) =$$

$$= \frac{-6 - 6\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$$

Logo,

$$P'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-6 - 6\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-6 - 6 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{4}} = -12 .$$

Pelo que se conclui que o declive da reta tangente ao gráfico da função P, no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, é -12.

FIM

GRUPO I

1.

Temos que A e B são acontecimentos incompatíveis, logo $P(A \cap B) = 0$.

Como $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ e $P(A \cap B) = 0$, vem que:

$P(\overline{A} \cap B) = P(B)$, pelo que $P(B) = 0{,}55$.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cap B) = 0$ e $P(A) = 0{,}3$, temos que:

$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}55 - 0 = 0{,}85$

Assim, pelo teorema do acontecimento contrário, vem que:

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0{,}15$

Resposta correta: (**C**)

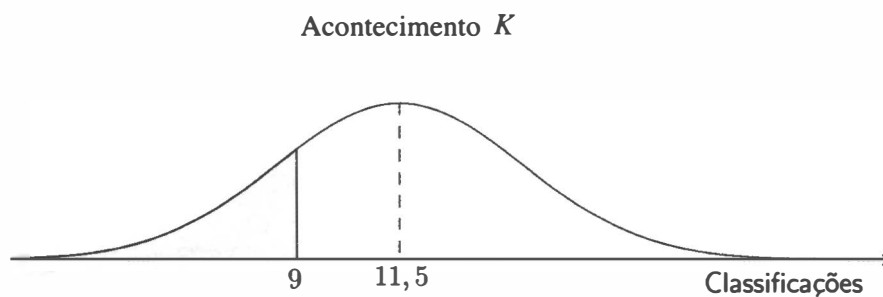
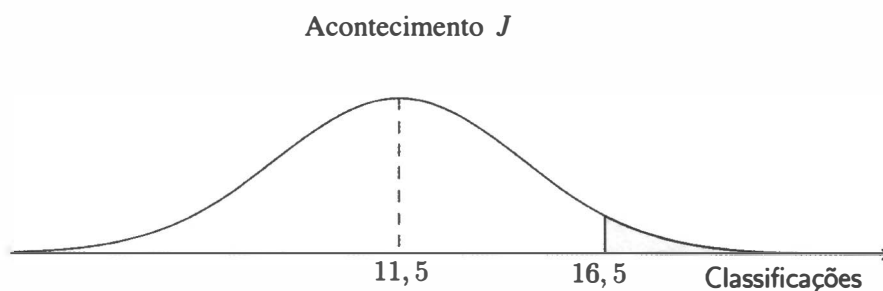
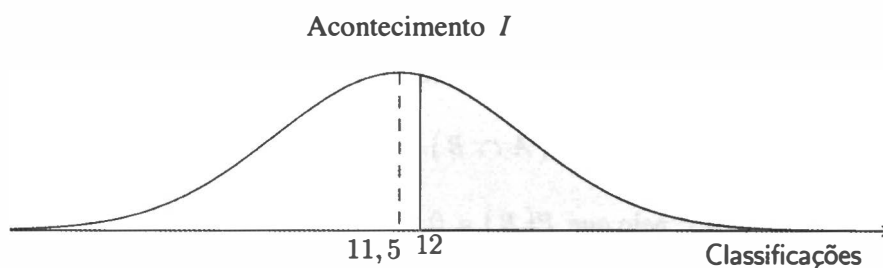
Distribuição normal

2.

Esboçando a representação geométrica das probabilidades dos três acontecimentos, vem:

Acontecimento I

Acontecimento J

11,5
16,5
Classificações

Acontecimento K

Assim, podemos afirmar que o acontecimento I é o mais provável e o acontecimento J é o menos provável, pelo que:

$P(J) < P(K) < P(I)$

Resposta correta: (**A**)

Combinatória

3.

Para que a comissão seja mista, deve ter pelo menos um rapaz, e como deve ter mais raparigas que rapazes, então o número de comissões diferentes que se podem formar pode ser calculado como a soma de comissões diferentes relativas a composições de dois tipos:

- 3 raparigas e 2 rapazes

  Como a ordem não é relevante, podemos escolher 3 raparigas do conjunto das 15, de ${}^{15}C_3$ formas diferentes, e podemos escolher os 2 rapazes do conjunto dos 7, de ${}^{7}C_2$ formas diferentes. Logo, existem ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2$ comissões deste tipo;

- 4 raparigas e 1 rapaz

  As comissões deste tipo são ${}^{15}C_4 \times 7$, que correspondem a escolher 4 das 15 raparigas e 1 dos 7 rapazes, sem considerar a ordem relevante.

Assim, o número de comissões diferentes que se podem formar, de acordo com as condições impostas, é:

$${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$$

Resposta correta: (**B**)

Funções

1.ª derivada e 2.ª derivada

4.

Determinando a expressão da segunda derivada da função f, vem:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 2(4+x)^{2-1} \times (4+x)' = 2(4+x) \times (0+1) = 2x + 8$$

Calculando o zero da segunda derivada da função f, temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$$

Estudando o sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico da função f, temos:

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	P.I.	$\cup$

Logo, podemos concluir que o gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-4\ ,\ f(-4))$.

Resposta correta: (**D**)

Assíntotas

5.

Como $\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) + 2x \right) = 2$, temos que

$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) + 2x - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (-2x + 2) \right) = 0$, o que significa que a reta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

O único gráfico que admite a reta $y = -2x + 2$ como assíntota é o gráfico da opção (A).

Resposta correta: (**A**)

Logaritmos

6.

Simplificando a condição $\ln\left(e^{-x} - a\right) \le 0$ e tendo em conta que a função logarítmica, de base e, tem imagens não positivas para $x \in \left]0\ ,\ 1\right]$, temos:

$$\ln\left(e^{-x} - a\right) \le 0 \Leftrightarrow 0 < e^{-x} - a \le 1 \Leftrightarrow e^{-x} - a > 0 \wedge e^{-x} - a \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} > a \wedge e^{-x} \le 1 + a \Leftrightarrow -x > \ln(a) \wedge -x \le \ln(1 + a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -\ln(a) \wedge x \ge -\ln(1 + a)$$

Assim, $S = \left[-\ln(1 + a)\ ,\ -\ln(a)\right[$.

Resposta correta: (**B**)

7.

Escrevendo $(1+i)$ na forma trigonométrica, temos $(1+i) = \rho\, cis(\theta)$, onde:

- $\rho = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$;
- $\text{tg}(\theta) = \frac{1}{1} = 1$; como o afixo de $(1+i)$ pertence ao 1.º quadrante, θ é um ângulo do 1.º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$ (argumento positivo mínimo).

Portanto, $(1+i) = \sqrt{2}\, cis\frac{\pi}{4}$.

Pela fórmula de Moivre para a potência, temos que:

$$w = (1+i)^{2013} = \left(\sqrt{2}\, cis\frac{\pi}{4}\right)^{2013} = \left(\sqrt{2}\right)^{2013} cis\left(2013 \times \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{2013} cis\left(\frac{2013\pi}{4}\right)$$

Assim:

$$\arg(w) = \frac{2013\pi}{4} = \frac{(4 \times 503 + 1)\pi}{4} = \frac{4 \times 503\pi + \pi}{4} = \frac{4 \times 503\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 503\pi + \frac{\pi}{4}$$

Pelo que:

$$\arg(w) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \text{ (argumento positivo mínimo).}$$

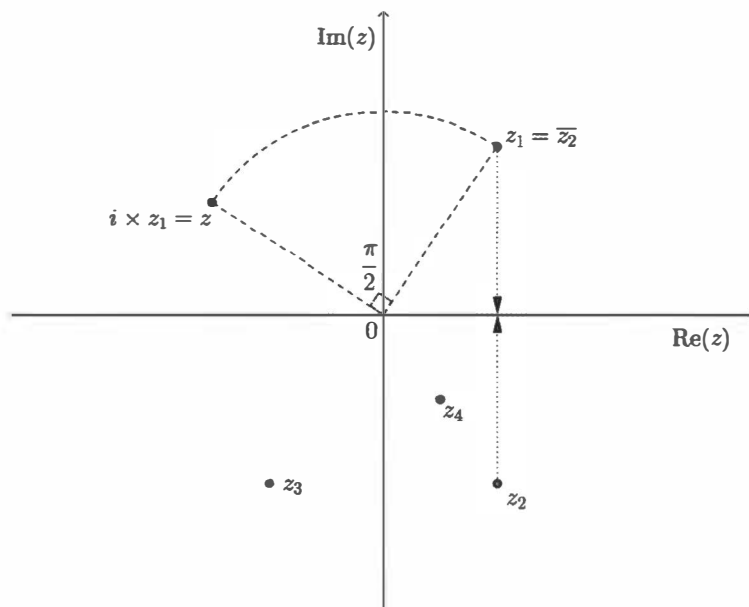
Ou seja, a representação geométrica de w é um ponto do 3.º quadrante que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pelo que $Re(z) = Im(z)$.

Resposta correta: (**D**)

Operações

8.

As operações "*multiplicar por* i" e "*transformar no conjugado*" correspondem geometricamente a "*fazer uma rotação de centro em O e amplitude* $\frac{\pi}{2}$ *radianos*" e "*encontrar o ponto simétrico relativamente ao eixo real*", respetivamente.

Assim, se considerarmos as operações inversas, pela ordem inversa, a partir da imagem geométrica de z (como indicado na figura seguinte), obtemos como resposta a imagem geométrica de z_2.

Ou, dizendo de outra forma, se $w = z_2$, temos que $\overline{w} = \overline{z_2} = z_1$ e $i \times \overline{w} = i \times z_1 = z$, pelo que $w = z_2$.

Resposta correta: (**C**)

GRUPO II

N.os complexos

Operações

1.

1.1.

Como $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, vem que:

$$1 + 2i\,cis\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + 2i\,cis\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i + i^2 = 1 - \sqrt{3}i - 1 =$$

$$= -\sqrt{3}i = \sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Escrevendo $1 + \sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica, temos $1 + \sqrt{3}\,i = \rho\,cis(\theta)$, onde:

- $\rho = \left|1 + \sqrt{3}\,i\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2;$
- $\text{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$; como o afixo de $1 + \sqrt{3}i$ pertence ao 1.º quadrante, θ é um ângulo do 1.º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$ (argumento positivo mínimo).

Assim, $1 + \sqrt{3}\,i = 2cis\frac{\pi}{3}$.

Portanto,

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + 2i\,cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}cis\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}cis\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}cis\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Se $z = cis(\theta)$, então $\frac{z}{z_1} = \frac{cis\theta}{\frac{2\sqrt{3}}{3}cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}cis\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2\sqrt{3}}cis\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right)$

E como $\frac{z}{z_1}$ é número real negativo, $\arg\left(\frac{z}{z_1}\right) = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, e assim temos que:

$$\theta - \frac{5\pi}{6} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{6\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in [0\ ,\ 2\pi[$, $k = 0$ e $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

1.2.

Sabemos que $\left|\overline{z_2}\right| = \left|z_2\right|$ e que $\arg\left(\overline{z_2}\right) = -\arg\left(z_2\right)$, logo $\overline{z_2} = \sqrt{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

Assim, temos que o polígono regular pode ser decomposto em n triângulos isósceles, congruentes com o triângulo OAA', em que o ponto A é a imagem geométrica de z_2 e A' é a imagem geométrica de $\overline{z_2}$. Como a amplitude do ângulo AOA' é $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, sabemos que

$\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi \times 6}{\pi} = n \Leftrightarrow 12 = n$.

Assim, temos que z_2 (e também $\overline{z_2}$) são raízes de índice 12 de w, ou seja, $w = \left(z_2\right)^{12}$.

Logo usando a fórmula de Moivre e escrevendo o resultado da potência na forma algébrica, temos:

$$w = \left(z_2\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} cis\left(12 \times \frac{\pi}{12}\right) = 64\,cis\pi = -64\,.$$

2.

Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, e os acontecimentos:

F : "A lâmpada escolhida é fluorescente";

T : "A lâmpada escolhida tem a forma tubular".

temos que $P(F) = 0{,}55$, $P(T|F) = 0{,}5$ e $P(\overline{T}|\overline{F}) = 0{,}9$.

Organizando os dados numa tabela, obtemos:

	F	$\overline{F}$	Total
T	0,275	0,045	0,32
$\overline{T}$	0,275	0,405	0,68
Total	0,55	0,45	1

$$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$$

$$P(T \cap F) = P(F) \times P(T|F) = 0{,}55 \times 0{,}5 = 0{,}275$$

$$P(\overline{T} \cap F) = P(F) - P(T \cap F) = 0{,}55 - 0{,}275 = 0{,}275$$

$$P(\overline{T} \cap \overline{F}) = P(\overline{F}) \times P(\overline{T}|\overline{F}) = 0{,}45 \times 0{,}9 = 0{,}405$$

$$P(\overline{T}) = P(\overline{T} \cap \overline{F}) + P(\overline{T} \cap F) = 0{,}275 + 0{,}405 = 0{,}68$$

$$P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$$

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular, e escrevendo o resultado com arredondamento às centésimas, temos:

$$P(F|T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}275}{0{,}32} \approx 0{,}86 .$$

3.

3.1.

Existem 12 bolas numeradas de 1 a 12 e só 2 delas têm um número múltiplo de 5 (a bola com o número 5 e a bola com o número 10).

Assim, ao retirarmos 3 bolas, podemos ter 0 bolas numeradas com múltiplos de 5, apenas 1 bola numerada com um número múltiplo de 5 ou 2 bolas numeradas com números múltiplos de 5.

Calculando as respetivas probabilidades temos:

$$P(X=0)=\frac{{}^{2}C_0\times{}^{10}C_3}{{}^{12}C_3}=\frac{1\times 120}{220}=\frac{120}{220}=\frac{12}{22}=\frac{6}{11}$$

$$P(X=1)=\frac{{}^{2}C_1\times{}^{10}C_2}{{}^{12}C_3}=\frac{2\times 45}{220}=\frac{90}{220}=\frac{9}{22}$$

$$P(X=2)=\frac{{}^{2}C_2\times{}^{10}C_1}{{}^{12}C_3}=\frac{1\times 10}{220}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

Distribuição binomial

3.2.

Como as sucessivas extrações das bolas são feitas repondo a bola extraída anteriormente, cada repetição da experiência é feita de forma independente das restantes.

Definindo o acontecimento "*registar número múltiplo de 3*" como sucesso, este acontecimento tem probabilidade não nula em cada repetição da experiência, e como as repetições são independentes, a probabilidade é constante em cada uma delas.

Assim, para a aplicação do modelo binomial $\left(P(X = k) = {}^{n}C_{k}\ p^{k}\ q^{n-k} \right)$, como o João fará extrações sucessivas até ter registado 8 elementos, temos que a experiência será repetida 8 vezes $(n = 8)$.

Como definimos o acontecimento "*registar número múltiplo de 3*" como sucesso, temos que a probabilidade é $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (das 12 bolas, 4 são múltiplos de 3: $M_3 = \{3, 6, 9, 12\}$).

Logo, a probabilidade do insucesso é $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Como se pretende calcular a probabilidade de que, nas 8 experiências, sejam registados exatamente 5 vezes números múltiplos de 3, temos que $k = 5$.

Assim, temos que:

$$P(X = 5) = {}^{8}C_{5} \left(\frac{1}{3}\right)^{5} \left(\frac{2}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \times {}^{8}C_{5}$$

Como se queria demonstrar.

Funções

Resolução gráfica

4.

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função, em cada ponto, é dado pela função derivada, determinemos a sua expressão analítica:

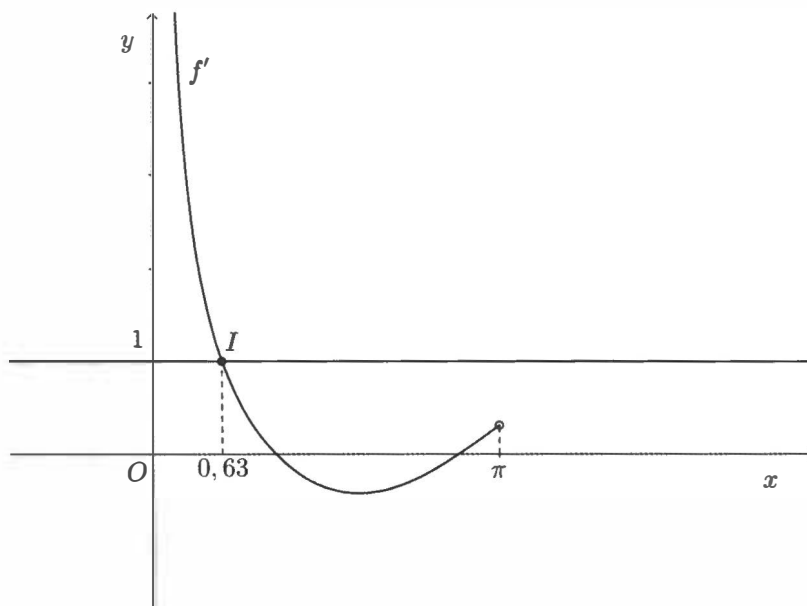
$$f'(x) = (\ln x + \cos x - 1)' = (\ln x)' + (\cos x)' - (1)' = \frac{1}{x} + (-\operatorname{sen} x) - 0 = \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x$$

Como o declive de uma reta é dado pela tangente da sua inclinação, temos que:

$$m = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

Logo, a abcissa do ponto A é a solução da equação

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x = 1$$

Assim, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f' e a reta $y = 1$, numa janela coerente com o domínio da função f $(0 < x < \pi)$ (reproduzido na figura seguinte), e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto: $I(0{,}63\ ;\ 1{,}00)$.

Ou seja, o valor aproximado às centésimas da abcissa do ponto A é $0{,}63$.

5.

5.1.

Sabemos que $f(0) = \ln k$

Calculando $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ temos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{1 - e^{2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2\times 3x}{2}}{-\left(e^{2x} - 1\right)} = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{3}{2} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = -\frac{3}{2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x}} =$$

$$\overset{(1)}{=} -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^{y} - 1}{y}}_{\textit{Limite notável}}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}$$

(1) (se $y = 2x$, como $x \to 0^-$ então $y \to 0^-$)

Assim, para que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, temos que:

$$-\frac{3}{2} = \ln k \Leftrightarrow k = e^{-\frac{3}{2}}.$$

1.ª derivada

5.2.

Começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x \in \left]0\ ,\ +\infty\right[$.

$$\left(\frac{x}{2} - \ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' = \left(\frac{x}{2}\right)' - \left(\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' = \frac{1}{2} \times (x)' - \frac{\left(\frac{6x}{x+1}\right)'}{\frac{6x}{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 - \frac{\frac{(6x)'(x+1) - (6x)(x+1)'}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{6(x+1) - (6x)(1+0)}{(x+1)^2}}{\frac{6x}{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{6(x+1) - 6x}{x+1}}{6x} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{6x + 6 - 6x}{x+1}}{6x} = \frac{1}{2} - \frac{6}{6x(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)}$$

Determinando os zeros da derivada em $\left]0\ ,\ +\infty\right[$, vem:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x(x+1)} \underset{x(x+1)\neq 0}{\Leftrightarrow} x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = 1 \lor x = -2$$

Como $-2 \notin \left]0\ ,\ +\infty\right[$, 1 é o único zero da derivada em $\left]0\ ,\ +\infty\right[$.

Estudando, neste intervalo, a variação do sinal da derivada e relacionando-o com a monotonia da função f, temos:

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	n. d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n. d.	↘	mín.	↗

Assim, podemos concluir que $f(1)$ é um extremo relativo da função f em $\left]0\ ,\ +\infty\right[$.

Calculando $f(1)$, temos:

$$f(1) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{6 \times 1}{1+1}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln(3) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - \ln(3) =$$

$$= \ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln(3) = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$$

Como se queria demonstrar.

Assíntotas

6.

Como $y = 2x - 1$ é assíntota do gráfico de g, e o domínio da função g é $\mathbb{R}^+$, temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$.

Uma vez que o domínio da função h é $\mathbb{R}^+$, calculemos o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - (g(x))^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{(g(x))^2}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \to +\infty} \frac{(g(x))^2}{x^2} = \frac{1}{+\infty} - \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \right)^2 =$$

$$= 0 - \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} \right)^2 = -2^2 = -4$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -4$, o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal, de equação $y = -4$, como queríamos provar.

Funcões trigonométricas

7.

7.1.

Consideremos $\overline{DA}$ a medida da altura do triângulo e $\overline{EC}$ a medida da base.

Sabendo que $\overline{CA} = 1$, porque é a medida do raio da circunferência, temos que: $\overline{DA} = \operatorname{sen} x$ e $\overline{DC} = \cos x$.

Como $\overline{ED} = 6$, temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6 + \cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{6 \operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{sen} x}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2}$$

Uma vez que $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, podemos escrever:

$$A_{[AEC]} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\frac{2 \cos x \operatorname{sen} x}{2}}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} =$$

$$= 3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$$

Como se queria demonstrar.

Teorema de Bolzano

7.2.

A função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, pelo que é uma função contínua em $\mathbb{R}$, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Determinemos $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 1{,}72$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 2{,}37$$

Como $1{,}72 < 2 < 2{,}37$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2 < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, então, podemos concluir, pelo teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$, tal que $f(c) = 2$, ou seja, que a equação $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

FIM

GRUPO I

Probabilidades

Probabilidade condicionada e axiomática

1.

Sabe-se que $P(A) = 0{,}4$ e $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4$; então, $P(\overline{A}) = 0{,}6$.

Como $P(B \mid \overline{A}) = 0{,}8$ podemos escrever:

$$P(B \mid \overline{A}) = 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = 0{,}8 \Leftrightarrow P(B \cap \overline{A}) = 0{,}8 \times 0{,}6 \Leftrightarrow P(B \cap \overline{A}) = 0{,}48$$

Por outro lado, sabe-se que $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ e como $P(A \cap B) = 0{,}2$, vem:

$P(B) = 0{,}2 + 0{,}48 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}68$

Resposta correta: (**C**)

Combinatória

2.

Existem ${}^{10}C_6$ maneiras diferentes de escolher 6 posições, de entre 10, para colocar os 6 algarismos 2.

Colocados os algarismos 2, restam 4 posições para dispor 4 algarismos escolhidos de entre os restantes 8. Assim, há 8 hipóteses para cada uma das posições, ou seja, $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$ possibilidades.

Teremos então ao todo ${}^{10}C_6 \times 8^4$ números naturais de 10 algarismos com exatamente 6 algarismos 2.

Resposta correta: (**A**)

Funções

Limite segundo Heine

3.

Dado que $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $x_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0^+$, isto é, $x_n \to 0^+$.

Assim, pela definição de limite segundo Heine,

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} - 3 \right) = e^{\frac{1}{0^+}} - 3 = e^{+\infty} - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

Portanto, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{f(x_n)} = \frac{2}{+\infty} = 0$

Resposta correta: (**C**)

Teorema de Bolzano

4.

Como o teorema de Bolzano garante que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]0\ ,\ 1[$ e f é contínua em $\mathbb{R}$, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, determinemos os valores reais de k tais que $f(0) \times f(1) < 0$.

Como $f(0) = k \times e^0 + 0 = k$ e $f(1) = k \times e + 1 = ek + 1$ tem-se:

$f(0) \times f(1) < 0 \Leftrightarrow k \times (ek + 1) < 0$, inequação do 2.º grau para os valores de $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como $e > 0$, a parábola que constitui o gráfico da função definida por $y = ek^2 + k$ tem a concavidade voltada para cima.

Assim, $f(0) \times f(1) < 0 \Leftrightarrow k \times (ek + 1) < 0 \Leftrightarrow ek^2 + k < 0 \Leftrightarrow k < 0 \wedge k > -\frac{1}{e}$.

Cálculos auxiliares:

$ek^2 + k = 0 \Leftrightarrow k \times (ek + 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -\frac{1}{e}$

Portanto, o conjunto solução da condição é o intervalo $\left]-\frac{1}{e}\ ,\ 0\right[$.

Resposta correta: (**B**)

1.ª derivada

5.

Como $f(x) = a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)$, tem-se:

$$f'(x) = \left(a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{a}{x}\right)'}{\frac{a}{x}} = \frac{-\frac{a}{x^2}}{\frac{a}{x}} = -\frac{ax}{ax^2} = -\frac{1}{x},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, a \in \mathbb{R}^+.$$

Resposta correta: (**B**)

Geometria

Equações de retas e planos

6.

Como o plano α é definido pela equação $4x - z + 1 = 0$, o vetor, $\vec{n}$, de coordenadas $(4, 0, -1)$ é normal ao plano α.

Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r. Como a reta r é perpendicular ao plano α, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são colineares.

A reta definida pela condição:

- da opção (**A**), tem um vetor diretor $\overrightarrow{r_A} = (4, 1, 0)$, que não é colinear com o vetor $\vec{n}$, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n} = \lambda \overrightarrow{r_A}$.
- da opção (**B**), tem um vetor diretor $\overrightarrow{r_B} = (0, 1, 0)$, que não é colinear com o vetor $\vec{n}$, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n} = \lambda \overrightarrow{r_B}$.
- da opção (**C**), tem um vetor diretor $\overrightarrow{r_C} = (1, 0, 4)$, que não é colinear com o vetor $\vec{n}$, visto que não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n} = \lambda \overrightarrow{r_C}$.

Assim, a reta definida pela condição da opção (**D**) é a reta r pois tem um vetor diretor $\overrightarrow{r_D} = (4, 0, -1)$, que é colinear com o vetor $\vec{n}$, visto que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda = 1)$ tal que $\vec{n} = \lambda \overrightarrow{r_D}$.

Resposta correta: (**D**)

Funções

Funções trigonométricas

7.

Como os pontos B e C têm a mesma abcissa e C e D têm a mesma ordenada, o triângulo $[BCD]$ é retângulo em C.

Portanto, a área do triângulo $[BCD]$ pode ser dada por: $A_{[BCD]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{CD}}{2}$.

Como α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB e a circunferência tem centro O e raio 1, o ponto B tem coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Então, $\overline{BC} = |\operatorname{sen}\alpha|$ e $\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} \Leftrightarrow \overline{CD} = 3 - |\cos\alpha|$.

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$, pelo que $|\operatorname{sen}\alpha| = \operatorname{sen}\alpha$ e $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$

Tem-se então,

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{CD}}{2} \Leftrightarrow A_{[BCD]} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \times (3-(-\cos\alpha))}{2} \Leftrightarrow A_{[BCD]} = \frac{1}{2}(3+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

Resposta correta: (**C**)

N.os complexos

Potências e raízes

8.

No plano complexo, as imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z, não nulo, são os vértices de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial. Como o polígono regular da figura 2 tem 6 lados, então $n = 6$.

As raízes sextas de um número complexo z têm todas o mesmo módulo e os seus argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Seja w a raiz sexta do complexo z que tem por imagem geométrica o vértice C de coordenadas $\left(-2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}\right)$.

Como $w = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$, então

$$|w| = \left|-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i\right| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8+8} = 4\,.$$

Sendo θ um argumento de w, tem-se que $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -1$.

Como w é um número complexo cuja imagem geométrica, C, pertence ao segundo quadrante, vem $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (argumento positivo mínimo).

Assim, $w = 4cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ é uma das 6 raízes de índice 6 de um número complexo z.

Uma vez que as raízes sextas de um número complexo z, têm todas o mesmo módulo, as alternativas **(A)** e **(C)** não estão corretas, pois o módulo dos números complexos dados não é igual a 4.

Para obter um argumento da raiz sexta do número complexo z que tem por imagem geométrica o vértice E basta adicionar $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ ao argumento de w, isto é,

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}\,.$$

Assim, a raiz sexta de z, cuja imagem geométrica é o vértice E, é o número complexo $4cis\left(\frac{17\pi}{12}\right)$.

Resposta correta: **(D)**

GRUPO II

1.

1.1.

Seja $w_1 = -1 + \sqrt{3}i$. Escrevendo w_1 na forma trigonométrica, temos:

- $|w_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$
- sendo θ um argumento de w_1, como $\theta \in 2.^\circ$ quadrante e $\text{tg}\theta = -\sqrt{3}$, vem $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (argumento positivo mínimo).

Assim, $w_1 = 2cis\frac{2\pi}{3}$.

Considerando $w_2 = 1 - i$ e escrevendo w_2 na forma trigonométrica, temos:

- $|w_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- sendo β um argumento de w_2, como $\beta \in 4.^\circ$quadrante e $\text{tg}\beta = -1$, vem $\beta = -\frac{\pi}{4}$ (argumento principal).

Logo $w_2 = \sqrt{2}\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Substituindo em z_1, vem:

$$z_1 = \frac{\left(-1 + \sqrt{3}i\right)^3}{1 - i} = \frac{\left(2cis\frac{2\pi}{3}\right)^3}{\sqrt{2}\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{8cis2\pi}{\sqrt{2}\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{8}{\sqrt{2}} cis\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{2} cis\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Calculando $z_1 \times (z_2)^2$ na forma trigonométrica, temos:

$$z_1 \times (z_2)^2 = 4\sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right) \times (cis\alpha)^2 = 4\sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right) \times cis(2\alpha) = 4\sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$$

Para que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um imaginário puro, temos que $\arg\left(z_1 \times (z_2)^2\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ou seja,

$$\frac{\pi}{4} + 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi + 8\alpha = 2\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 8\alpha = \pi + 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in [0, \pi[$, concretizando os valores de k, obtemos para $k = 0$ e $k = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{8}$ e $\alpha = \frac{5\pi}{8}$, respetivamente, os valores para os quais $z_1 \times (z_2)^2$ é, no intervalo pedido, um imaginário puro.

Demonstrações

1.2.

Sabe-se que $|z|^2 = z \times \bar{z}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Assim,

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 \leq 10 \Leftrightarrow (1 + z)\left(\overline{1 + z}\right) + (1 - z)\left(\overline{1 - z}\right) \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + z)(1 + \bar{z}) + (1 - z)(1 - \bar{z}) \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + z + \bar{z} + z \times \bar{z} + 1 - z - \bar{z} + z \times \bar{z} \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2z \times \bar{z} \leq 10 \Leftrightarrow z \times \bar{z} \leq 4 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq |z| \leq 2 \Leftrightarrow |z| \leq 2$$

Como se queria demonstrar.

Probabilidades

2.

Combinatória

2.1.

Dado o acontecimento B: "*As três bolas retiradas não têm a mesma cor*", o acontecimento contrário é $\overline{B}$: "*As três bolas retiradas têm a mesma cor*".

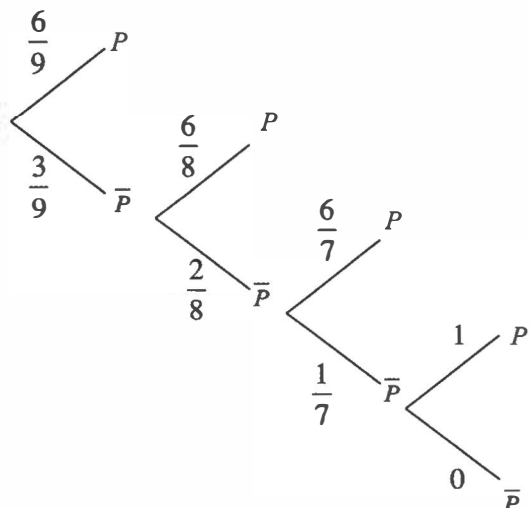
O acontecimento $\overline{B}$ ocorre apenas quando as três bolas retiradas tiverem cor preta. Atendendo a que a extração das três bolas é simultânea, o número de casos possíveis é dado por ${}^9C_3$ e o número de casos favoráveis à ocorrência de $\overline{B}$ é igual a ${}^6C_3$.

Assim, a probabilidade de as bolas retiradas não serem todas da mesma cor é

$$P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{{}^6C_3}{{}^9C_3} = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}.$$

2.2.

Como X é o número de bolas retiradas da caixa, até ser retirada uma bola preta, a variável aleatória X pode tomar os seguintes valores: $1, 2, 3$ e 4.

Seja P o acontecimento "*sair bola preta*". Para determinar a probabilidade de cada um dos valores da variável, consideremos o seguinte diagrama:

$$P(X=1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}\times 1=\frac{1}{84}$$

Assim, a tabela de distribuição da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

Probabilidade condicionada

3.

$P(A \mid B)$ designa a probabilidade de o acontecimento A ocorrer sabendo que B já ocorreu, isto é, a probabilidade de o número registado no primeiro lançamento ser negativo, sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo.

Se o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo, isso significa que esses números são ambos positivos ou ambos negativos. Determinemos o número de casos possíveis com recurso a uma tabela de dupla entrada:

x	−1	1	2	3
−1	+	−	−	−
1	−	+	+	+
2	−	+	+	+
3	−	+	+	+

Admitindo que o acontecimento B se realizou, sabemos que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo, pelo que existem 10 casos possíveis, dos quais apenas um é favorável à realização do acontecimento A, ou seja, há apenas um caso em que o número registado no primeiro lançamento é negativo.

De acordo com a lei de Laplace, o valor pedido é: $P(A \mid B) = \frac{1}{10}$.

Geometria

Produto escalar

4.

O ângulo AHC é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{HC}$ e $\overrightarrow{HA}$.

Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, as suas coordenadas são $(a, 0, 0)$, com $a > 0$. Como a aresta do cubo é 3, o ponto A tem coordenadas $(3, 0, 0)$.

Dado que o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy e a aresta do cubo é 3, as suas coordenadas são $(0, -3, 0)$.

Como α é a amplitude do ângulo AHC, tem-se que:

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = \left\|\overrightarrow{HC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{HA}\right\| \times \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}}{\left\|\overrightarrow{HC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{HA}\right\|}.$$

Por outro lado, tem-se:

$\overrightarrow{HC} = C - H = (0, -3, 0) - (3, -2, 3) = (-3, -1, -3)$;

$\overrightarrow{HA} = A - H = (3, 0, 0) - (3, -2, 3) = (0, 2, -3)$;

$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = (-3, -1, -3) \cdot (0, 2, -3) = 0 - 2 + 9 = 7$;

$\left\|\overrightarrow{HC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$ e $\left\|\overrightarrow{HA}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Assim,

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}}{\left\|\overrightarrow{HC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{HA}\right\|} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{19} \times \sqrt{13}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{247}}.$$

Como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{49}{247} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{198}{247}.$$

Funções

5.

5.1.

Continuidade

A função f é contínua em $x = 4$ se, e só se, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$.

Comecemos por calcular os limites laterais:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \left(\ln\left(2e^x - e^4\right)\right) = \ln\left(2e^4 - e^4\right) = \ln\left(e^4\right) = 4\,.$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x}\right);\text{ indeterminação do tipo } \frac{0}{0}.$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 4 \Leftrightarrow x = y + 4$. Como $x \to 4^-$ então $y \to 0^-$.

Assim,

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4-x}\right) = \lim_{x\to 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x-4)}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 3(y+4) + 11}{-y}\right) = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 1 - 3y}{-y}\right) = \lim_{y\to 0^-} \left(-\frac{e^y - 1}{y} + 3\right) =$$

$$= -\underbrace{\lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y}\right)}_{\text{limite notável}} + \lim_{y\to 0^-} (3) = -1 + 3 = 2$$

Então, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 2$

Concluímos que: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$.

Portanto, como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, pelo que a função f não é contínua em $x = 4$.

5.2.

Assíntotas

Como o gráfico de f admite uma assíntota de equação $y = x + b$, com $b \in \mathbb{R}$ quando $x \to +\infty$, o declive da assíntota é $m = 1$, pelo que:

$$b = \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln\left(2e^x - e^4\right) - x\right) \text{ (indeterminação)}$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln\left(2e^x - e^4\right) - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln\left(2e^x - e^4\right) - \ln e^x\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{2e^x - e^4}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \ln\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right) = \ln\left(2 - \frac{e^4}{+\infty}\right) = \ln(2 - 0) = \ln 2$$

Então, $b = \ln 2$.

1.ª derivada

6.

6.1.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\times\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

e

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\text{sen}\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\text{sen}(\pi)=\frac{\pi}{2},$$

tem-se: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\times\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$

Assim, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}\right)=\frac{\pi}{4}.$

6.2.

Para efetuar o estudo das concavidades do gráfico de f determinemos a expressão analítica da segunda derivada de f.

$$f''(x) = (x - \text{sen}(2x))' = (x)' - (\text{sen}(2x))' = 1 - (2x)' \times \cos(2x) = 1 - 2\cos(2x)$$

Determinemos os zeros da segunda derivada de f no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretendem os zeros de f'' no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$, devemos considerar $k = 0$.

As soluções da equação $f''(x) = 0$ são: $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$.

Assim, estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, temos:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$	n. d.	+	0	−	0	+	n. d.
$f(x)$	n. d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	n. d.

Podemos então concluir que o gráfico da função f, tem:

- a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$;
- a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$;
- dois pontos de inflexão de abcissas $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$.

Resolução gráfica

7.

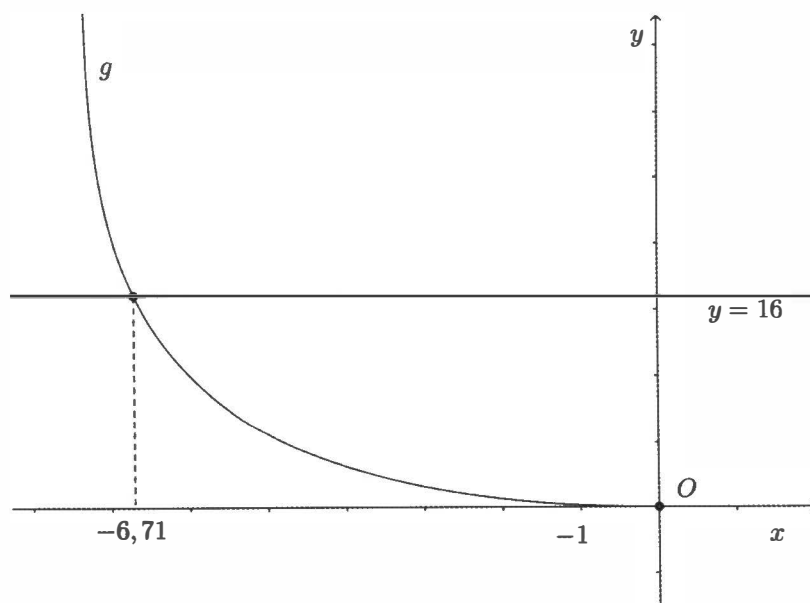
De acordo com o enunciado, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.

Assim, designando por x a abcissa do ponto B, a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x, por:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2} \Leftrightarrow 8 = \frac{|x| \times |f(x)+2|}{2} \Leftrightarrow 16 = |x| \times \left|-\ln\left(x + e^2\right) + 2\right|,$$

com $x \in \left]-e^2, 0\right[$, pois a abcissa de B é negativa.

Consideremos $g(x) = |x| \times \left|-\ln\left(x + e^2\right) + 2\right|$.

Recorrendo à calculadora gráfica, representemos, numa janela adequada, a curva correspondente à função g e a reta de equação $y = 16$ e determinemos o valor de $x \in \left]-e^2, 0\right[$ que verifica a condição: $|x| \times \left|-\ln\left(x + e^2\right) + 2\right| = 16$ (*),

Assim, a abcissa do ponto B é o valor de x que verifica a condição (*) e que corresponde à abcissa do ponto de interseção do gráfico da função g com a reta $y = 16$.

A abcissa do ponto B é aproximadamente $-6{,}71$.

FIM

GRUPO I

1.

Do enunciado sabe-se que os acontecimentos A e B são independentes, $P(A) = 0{,}4$ e $P(A \cap B) = 0{,}48$. Determinemos $P(B)$:

$$P(A \cap B) = 0{,}48 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}48 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} 1 - P(A \cup B) = 0{,}48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}52 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}52 \underset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{(4)}{\Leftrightarrow} P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0{,}52 \underset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{(5)}{\Leftrightarrow} 0{,}4 + P(B) - 0{,}4 \times P(B) = 0{,}52 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}6 \times P(B) = 0{,}12 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}2$$

(1) Leis de De Morgan;

(2) propriedade da probabilidade de acontecimento contrário;

(3) propriedade da probabilidade da união de acontecimentos;

(4) A e B são acontecimentos independentes;

(5) simplificação.

Resposta correta: **(C**)

2.

Seja A o acontecimento: "*Três vértices do octaedro definem um plano paralelo ao plano de equação* $z = 5$".

O número de casos possíveis é igual ao número de subconjuntos de três elementos que é possível formar a partir de um conjunto com seis elementos (os vértices do octaedro), isto é, ${}^{6}C_{3}$.

Dos seis vértices do octaedro, existem quatro, B, C, D e E, no plano xOy, que permitem definir planos paralelos a $z = 5$. Por conseguinte o número de casos favoráveis é igual ao número de subconjuntos de três elementos diferentes do conjunto $\{B, C, D, E\}$, isto é, ${}^{4}C_{3}$.

Assim, pela lei de Laplace, $P(A) = \dfrac{{}^{4}C_{3}}{{}^{6}C_{3}} = \dfrac{4}{{}^{6}C_{3}}$.

Resposta correta: (**B**)

Binómio de Newton

3.

O termo do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10}$, com $x \neq 0$, que não depende da variável x é o termo independente. Considerando a expressão do termo genérico desse desenvolvimento, determinemos a ordem do termo independente.

$$T_{p+1} = {}^{10}C_p\left(\frac{2}{x}\right)^p x^{10-p} = {}^{10}C_p \frac{2^p}{x^p} x^{10-p} = {}^{10}C_p\, 2^p\, x^{-p}\, x^{10-p} = {}^{10}C_p\, 2^p\, x^{10-2p}$$

Igualando $10-2p$ a zero, vem: $10-2p=0 \Leftrightarrow p=5$.

O termo pedido é: $T_6 = {}^{10}C_5\, 2^5\, x^0 = 8064$.

Resposta correta: (**B**)

Funções

Limite segundo Heine

4.

Sabe-se que a sucessão de números reais de termo geral $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente, $x_n < e$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (limite notável), pelo que $x_n \to e^-$.

Assim, pela definição de limite de uma função, segundo Heine, tem-se:

$$\lim g(x_n) = \lim_{x\to e^-} g(x) \underset{(1)}{=} \ln(e-e^-) = \ln(0^+) = -\infty$$

(1) como $x_n \to e^-$, então $(-x_n) \to e^+$ e portanto $(e-x) \to 0^+$.

Resposta correta: (**D**)

Continuidade

5.

De acordo com o enunciado, se a função f é contínua no seu domínio, também é contínua para $x=\frac{\pi}{2}$, pelo que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = k-3 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{y\to 0}\left(\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y}\right) = k-3 \Leftrightarrow$$

$$\underset{(2)}{\Leftrightarrow} -\lim_{y\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right) = k-3 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} -1 = k-3 \Leftrightarrow k=2$$

(1) Mudança de variável: $x-\frac{\pi}{2} = y \Leftrightarrow x = y+\frac{\pi}{2}$. Se $x\to\frac{\pi}{2}$ então $y\to 0$.

(2) Limite notável.

Resposta correta: (**C**)

2.ª derivada

6.

Com os dados apresentados é possível construir uma tabela de sinal da segunda derivada da função g .

x	$-\infty$	0		a	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

O único gráfico compatível com o sentido das concavidades identificadas é o gráfico da opção (A).

Resposta correta: (**A**)

Geometria

Equações de retas e planos

7.

Sendo α e β planos perpendiculares, então os respetivos vetores normais também são perpendiculares. De acordo com o enunciado, o vetor normal ao plano α tem coordenadas $\overrightarrow{n_\alpha}(3, 2, 0)$. Das opções apresentadas tem-se $(2, -3, 1)$ e $(2, -3, -1)$ como possíveis coordenadas para o vetor normal ao plano β , uma vez que se tratam de vetores perpendiculares a $\overrightarrow{n_\alpha}$. Assim, eliminamos as equações das opções apresentadas em (A) e em (D).

Como $A \in \beta$, verifiquemos a qual dos planos, representados pelas equações das opções (B) e (C), este pertence.

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da opção (C), verificamos que:

$2 \times 1 - 3 \times 0 + 1 \times 3 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0$, proposição falsa; logo A não lhe pertence;

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da opção (B), verificamos que:

$2 \times 1 - 3 \times 0 - 1 \times 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, proposição verdadeira; logo A pertence a este plano;

Assim, uma possível equação do plano β é $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Resposta correta: (**B**)

N.os complexos

Conjuntos e condições

8.

A circunferência representada na figura tem raio igual a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, pois

$$\left\|\overline{BC}\right\| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 0^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Sejam $\arg z_A$ e $\arg z_B$ os argumentos dos complexos cujas imagens geométricas são os pontos A e B, respetivamente. Então, $\operatorname{tg}\left(\arg z_A\right) = \frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$ e $\operatorname{tg}\left(\arg z_B\right) = \frac{2}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$.

Como se considera para $\arg z$ a determinação que pertence ao intervalo $\left[-\pi , \pi\right[$, então $\arg z_A = \frac{\pi}{3}$ e $\arg z_B = \frac{2\pi}{3}$.

A região a sombreado resulta da intersecção do exterior da circunferência com o ângulo formado pelas semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$, sendo A e B as imagens geométricas dos complexos de argumento $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, respetivamente.

Resposta correta: (**C**)

GRUPO II

1.

1.1.

O complexo z, na forma algébrica, é dado por:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

e o seu conjugado $\bar{z} = \sqrt{3} - i$.

A imagem geométrica do complexo $\bar{z}$ é o ponto A de coordenadas $\left(\sqrt{3}\,,\,-1\right)$. Substituindo z na expressão de w e simplificando, vem:

$$w = \frac{\left(\sqrt{3} + i - i\right)^4}{1 + i\left(\sqrt{3} - i\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{1 + \sqrt{3}i - 1} = \frac{9}{\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{9 \times (-i)}{\sqrt{3}i \times (-i)} = \frac{-9i}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{3}i$$

Então, a imagem geométrica do complexo w é o ponto B de coordenadas $\left(0\,,\,-3\sqrt{3}\right)$.

Na figura, está representado o triângulo $[AOB]$, sendo $[AP]$ a sua altura relativamente à base $[OB]$.

Assim, a área do triângulo $[AOB]$ é dada por:

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AP}}{2} = \frac{\left|-3\sqrt{3}\right| \times \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$$

1.2.

A equação dada é uma equação do 2.º grau em $z \in \mathbb{C}$.

Aplicando a fórmula resolvente, vem:

$$z^2 - 2\cos\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2\cos\alpha \pm 2\sqrt{\cos^2\alpha - 1}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\left(\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}\right)}{2} \Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm \sqrt{-\text{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm \sqrt{i^2 \times \text{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\alpha \pm i\,\text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha \vee z = \cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow$$

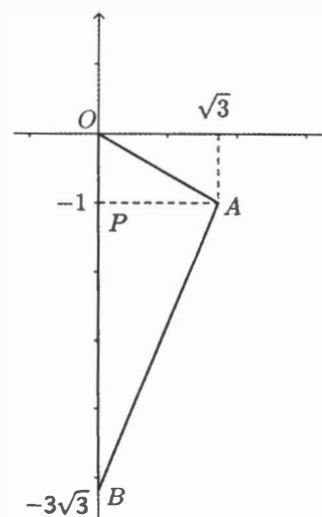
$$\Leftrightarrow z = cis\alpha \vee z = \cos(-\alpha) + i\,\text{sen}(-\alpha) \Leftrightarrow z = cis\alpha \vee z = cis(-\alpha)$$

As soluções da equação, em função de α, são: $z = cis\,\alpha$ e $z = cis(-\alpha)$.

Probabilidades

2.

Combinatória

2.1.

Dado o acontecimento B: "As duas bolas azuis ficam uma ao lado da outra", determinemos a probabilidade de B, $P(B)$.

Atendendo a que a extração das bolas é sucessiva e sem reposição, o número de casos possíveis é dado por $6!$.

Calculando o número de casos favoráveis à ocorrência de B, temos que ao considerar que as duas bolas azuis constituem um bloco, existem $5!$ modos diferentes de permutar esse bloco das bolas azuis com as restantes quatro bolas pretas. Para cada uma dessas maneiras existem $2!$ formas diferentes de as bolas azuis permutarem entre si. Assim, existem $5! \times 2!$ casos favoráveis.

Então, $P(B) = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Distribuições de probabilidades

2.2.

Da experiência apresentada, temos que os valores possíveis da variável aleatória X são: 0, 1 e 2.

Determinemos a probabilidade de cada um dos valores da variável:

$$P(X = 0) = \frac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{1}{5}$$

$$P(X = 1) = \frac{2 \times {}^4C_2}{{}^6C_3} = \frac{3}{5}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}^2C_2 \times {}^4C_1}{{}^6C_3} = \frac{1}{5}$$

Assim, a tabela de distribuição da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

3.

Designemos por α a amplitude do ângulo dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Pela definição de produto escalar de dois vetores, tem-se:

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\alpha}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \cos\alpha \ (*)$$

A medida da amplitude, em radianos, de cada ângulo interno de um polígono regular é dada por $\frac{(n-2)\pi}{n}$, sendo n o número de lados do polígono. Fazendo $n = 5$ obtemos a medida da amplitude de cada um dos ângulos internos do pentágono regular, ou seja, $\frac{3\pi}{5}$.

Como o triângulo $[AED]$ é isósceles, e num triângulo isósceles a lados iguais opõem-se ângulos iguais, tem-se: $\pi = \frac{3\pi}{5} + 2\beta$, sendo $\beta = D\hat{A}E = A\hat{D}E$.

Assim, $\pi = \frac{3\pi}{5} + 2\beta \Leftrightarrow \pi - \frac{3\pi}{5} = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{\frac{2\pi}{5}}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{5}$

Ora, $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{5} - \beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5}$

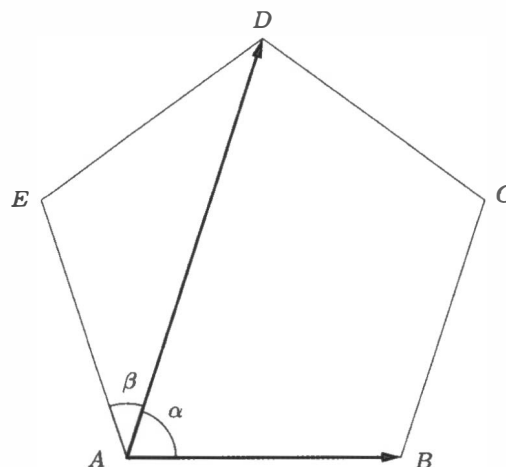
Substituindo em (*) o valor de α e aplicando a fórmula da duplicação do cosseno de um ângulo e a fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= 1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\pi}{5}$$

Conclui-se que,

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Funções

Assíntotas

4.

4.1.

Assíntotas verticais

Como a função f é contínua no seu domínio, apenas a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de f.

Tem-se:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) = 0 - 1 + (-\infty) \times \frac{1}{0^-} =$$

$$= -1 + (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

Conclui-se assim que a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f.

Assíntotas não verticais

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(-x)}{x} \right) = 1 - 0 + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln(-x)}{x} \right) =$$

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln(-x)}{x} \right) \underset{(1)}{=} 1 + \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{-y} \right) \times \left(- \underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\textit{limite notável}} \right) = 1 + 0 \times 0 = 1$$

(1) Fazendo a mudança de variável: $y = -x \Leftrightarrow x = -y$. Como $x \to -\infty$ então $y \to +\infty$.

Assim, $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(-1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) = -1 + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln(-x)}{x} \right) \underset{(2)}{=} -1 - \underbrace{\lim_{y \to +\infty} \left(\frac{\ln(y)}{y} \right)}_{\textit{limite notável}} = -1 - 0 = -1$$

(2) Fazendo a mudança de variável: $y = -x \Leftrightarrow x = -y$. Como $x \to -\infty$ então $y \to +\infty$.

Assim, $b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = -1$.

As assíntotas não verticais são retas de equação $y = mx + b$, e assim vem que:

Portanto, a reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f quando x tende para $-\infty$. Não pode haver outras assíntotas não verticais porque o domínio de f é limitado superiormente.

O gráfico de f admite como assíntotas as retas de equações $x = 0$ e $y = x - 1$.

Teorema de Bolzano

4.2.

A função f é contínua no seu domínio $]-\infty\ ,\ 0[$, por ser a soma de duas funções contínuas; logo, f é contínua em $[-e\ ,\ -1] \subset]-\infty\ ,\ 0[$.

$$f(-e) = -e - 1 + \frac{\ln e}{-e} = -e - 1 - \frac{1}{e} \approx -4{,}086$$

$$f(-1) = -1 - 1 + \frac{\ln(-(-1))}{-1} = 2$$

Ora, $f(-e) < -e < f(-1)$.

Como f é contínua em $[-e\ ,\ -1]$ e $f(-e) < -e < f(-1)$ então, pelo teorema de Bolzano concluímos que a equação $f(x) = -e$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-e\ ,\ -1[$.

1.ª derivada

4.3.

A função g tem domínio $]-\infty\ ,\ 0[$ e é definida pela expressão analítica $g(x) = -1 + \dfrac{\ln(-x)}{x}$,

pois $g(x) = -x + f(x) = -x + x - 1 + \dfrac{\ln(-x)}{x} = -1 + \dfrac{\ln(-x)}{x}$.

Para estudar a função g quanto à monotonia e existência de extremos, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de g.

$$g'(x) = (-1)' + \left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)' = 0 + \frac{(\ln(-x))' \times x - \ln(-x) \times x'}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-1}{-x} \times x - \ln(-x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x)}{x^2}$$

Como $D_g =]-\infty\ ,\ 0[$ e $g'(x) = \dfrac{1 - \ln(-x)}{x^2}$, então a função g' tem domínio $]-\infty\ ,\ 0[$.

Calculemos os zeros da derivada da função g, para $x < 0$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \underset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) = 1 \Leftrightarrow -x = e \Leftrightarrow x = -e$$

(1) proposição verdadeira porque $x < 0$.

Sinal de g', para $x < 0$:

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) > 0 \wedge x^2 \neq 0 \underset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) < 1 \Leftrightarrow -x < e \Leftrightarrow x > -e \Leftrightarrow x \in]-e\ ,\ 0[$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$-e$		0
$g'(x)$	$-$	0	$+$	n. d.
$g(x)$	↘	$g(-e)$	↗	n. d.

Por observação da tabela, conclui-se que a função g é crescente em $[-e\ ,\ 0[$ e decrescente em $]-\infty\ ,\ -e]$.

A função g tem um mínimo relativo para $x = -e$.

5.

Comecemos por observar que $[PQR]$ e $[PSR]$ são triângulos retângulos em Q e S, respetivamente, pois são triângulos inscritos em semicircunferências.

Como o lado $[PR]$, comum a ambos, é um diâmetro e $\overline{PQ} = \overline{PS}$ os triângulos retângulos $[PQR]$ e $[PSR]$ são geometricamente iguais, tendo ambos $[PR]$ por hipotenusa.

Então, a área do quadrilátero $[PQRS]$ é dada por:

$$A_{[PQRS]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \overline{QR} \times \overline{PQ}$$

Tem-se assim:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4\cos(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4\operatorname{sen}(\alpha)$$

Portanto, a área do quadrilátero $[PQRS]$ é dada, em função de α, por:

$A(\alpha) = 4\operatorname{sen}(\alpha) \times 4\cos(\alpha) = 16\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$

Então, $A(\theta) = 16\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$.

Determinemos, $A(\theta)$

Como $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ e $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$ tem-se:

$$1 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9}.$$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta > 0$ e consequentemente $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{8}{9}.$$

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{sen}\theta > 0$ e consequentemente $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{8}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Logo, o valor exato de $A(\theta)$ é:

$$A(\theta) = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}.$$

Resolução gráfica

6.

Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos A e B.

A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas, pelo que as suas coordenadas são $(0\ ,\ f(0))$.

Tem-se: $f(0) = -e^0 + 0^2 + 8 = -1 + 8 = 7$. Assim, o ponto A tem coordenadas $(0\ ,\ 7)$.

Designando por x a abcissa do ponto B, as suas coordenadas são $(x\ ,\ f(x))$, ou seja, o ponto B tem coordenadas $\left(x\ ,\ -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8\right)$.

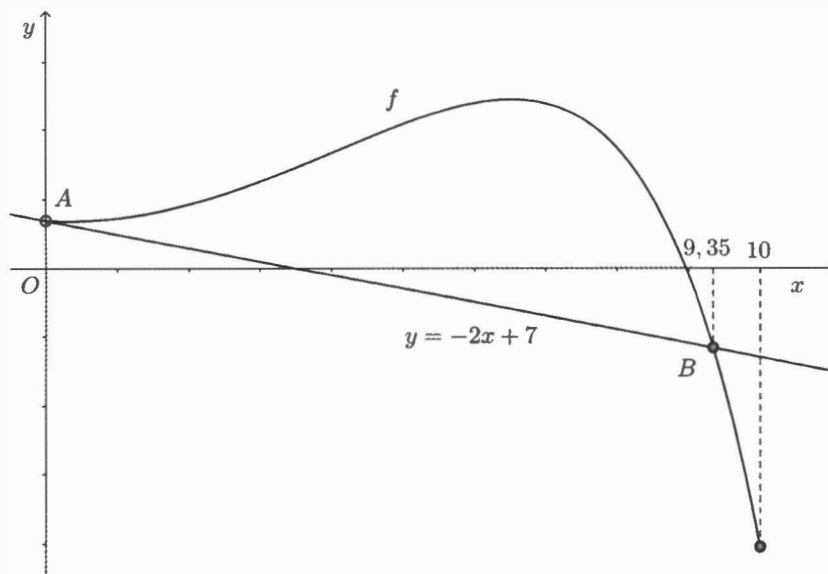
Assim, o declive da reta AB é dado, em função de x, por:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x}.$$

Como a reta AB tem declive -2, a abcissa do ponto B é a solução da equação $\frac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x} = -2$, no intervalo $]0\ ,\ 10]$.

Como $x > 0$, tem-se:

$$\frac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x} = -2 \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7.$$

Com o objetivo de resolver a equação $-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$, com recurso à calculadora gráfica, obteve-se o gráfico da função f definida por $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$ e a reta de equação $y = -2x + 7$ (reta AB).

O valor de x que verifica a equação $-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$, no intervalo $]0\ ,\ 10]$, é aproximadamente $9{,}35$.

A abcissa do ponto B é, então $x \approx 9{,}35$.

Assíntotas, 1.ª derivada e 2.ª derivada

7.

Relativamente à afirmação (I), determinemos os zeros de h', primeira derivada da função h.

Como o domínio de h' é $\mathbb{R}$, tem-se:

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}}=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \wedge e^{2x}\neq 0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=3$$

Estudemos o sinal de h'.

Como $e^{2x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, o sinal de h' só depende do sinal da função f.

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	$h(-2)$	↗	$h(3)$	↘

Por observação do quadro concluímos que a função h é crescente em $]-\infty\ ,\ 3]$ e decrescente em $[3\ ,\ +\infty[$, pelo que $h(3)$ é o único extremo relativo de h.

Assim, a afirmação (I) é falsa.

Em relação à afirmação (II), para calcular $h''(-2)$ determinemos a expressão analítica da segunda derivada de h:

$$h''(x)=\left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=\frac{f'(x)\times e^{2x}-f(x)\times\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2}=$$

$$=\frac{f'(x)\times e^{2x}-f(x)\times(2x)'\times\left(e^{2x}\right)}{e^{4x}}=$$

$$=\frac{e^{2x}\left(f'(x)-2f(x)\right)}{e^{4x}}=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$$

Como a função f é derivável em $\mathbb{R}$ e tem um extremo relativo para $x=-2$, então $f'(-2)=0$, e como -2 é um zero de f tem-se que $f(-2)=0$.

Assim, vem que: $h''(-2)=\dfrac{f'(-2)-2f(-2)}{e^{-4}}=\dfrac{0-2\times 0}{e^{-4}}=0$.

Logo, concluímos que a afirmação (II) é verdadeira.

No que se refere à afirmação (III):

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=3$, concluímos que a reta de equação $y=3$ é uma assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$, isto é, a reta de equação $y-3=0$ é assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$, pelo que concluímos que a afirmação (III) é falsa.

FIM

GRUPO I

Probabilidades

Combinatória

1.

Considerando todos os números ímpares de 5 algarismos, pretendemos saber quantos desses números têm 4 algarismos pares e são superiores a 20 000. Para o algarismo das unidades existem cinco possibilidades, tantas quantos os números ímpares $\{1, 3, 5, 7, 9\}$; os restantes algarismos poderão tomar qualquer valor do conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, à exceção do algarismo das dezenas de milhar, que não pode ser zero. Assim, existem 4×5^4 números nas condições dadas.

Resposta correta: (**D**)

Triângulo de Pascal

2.

Sabemos que a linha n do triângulo de Pascal, com $n > 2$, tem $n + 1$ elementos. Analisando o triângulo de Pascal, verifica-se que, em cada linha, o primeiro e o último elementos são iguais a 1 e o segundo e o penúltimo elementos iguais a n, pelo que, de acordo com o enunciado, tem-se:

$1 + 1 + n + n = 20 \Leftrightarrow 2n = 18 \Leftrightarrow n = 9$

Trata-se da linha do triângulo de Pascal constituída pelos elementos da forma ${}^9C_p$, com $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, isto é:

$$1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1$$

Dos dez números desta linha, existem seis que são números pares, pelo que 10 é o número de casos possíveis e 6 o número de casos favoráveis, num espaço de resultados em que os acontecimentos elementares são equiprováveis. Assim, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é dada por:

$P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Resposta correta: (**C**)

Funções

Limite segundo Heine

3.

Sabe-se que a sucessão de números reais de termo geral $x_n = -\frac{1}{n}$ é tal que:

$x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, pelo que $x_n \to 0^-$.

Pela definição de limite de uma função, segundo Heine, tem-se:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}\left(\frac{x-1}{e^x - 1}\right) \underset{(1)}{=} \frac{-1}{0^-} = +\infty .$$

(1) como $x \to 0^-$ então $\left(e^x\right) \to 1^-$ e portanto $\left(e^x - 1\right) \to 0^-$.

Resposta correta: (**D**)

Funções trigonométricas

4.

A área da região a sombreado pode ser obtida como a diferença entre a área do triângulo $[OBC]$ e a área do sector circular $[AOB]$.

A área do triângulo $[OBC]$ é igual a $\frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2}$.

Da definição de tangente trigonométrica de um ângulo agudo num triângulo retângulo tem-se $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}$. Como $\overline{OB} = 1$, vem $\overline{BC} = \operatorname{tg}\alpha$, pelo que a área do triângulo $[OBC]$ é dada por $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$. A área do sector circular $[AOB]$ é dada por $\frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Assim, a área da região a sombreado é dada, em função de α, por: $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{2}$.

Resposta correta: (**B**)

2.ª derivada

5.

Teremos de escolher a opção que corresponda ao gráfico de uma função com apenas dois pontos de inflexão.

Da análise dos gráficos que estão representados em cada uma das opções, podemos construir quadros, que estabelecem a relação entre o sinal da segunda derivada de f e o sentido da concavidade do seu gráfico. Designemos ainda por c_i, com $i \in \mathbb{N}$, os zeros de f'', segunda derivada de f.

(A)

x	-5		c_1		c_2		5
$f''(x)$	n. d.	$+$	0	$-$	0	$+$	n. d.
$f(x)$	n. d.	$\cup$	$f(c_1)$	$\cap$	$f(c_2)$	$\cup$	n. d.

(B)

x	-5		c_1		c_2		c_3		c_4		5
$f''(x)$	n. d.	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	n. d.
$f(x)$	n. d.	$\cup$	$f(c_1)$	$\cap$	$f(c_2)$	$\cup$	$f(c_3)$	$\cap$	$f(c_4)$	$\cup$	n. d.

(C)

x	-5		c_1		c_2		c_3		5
$f''(x)$	n. d.	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	n. d.
$f(x)$	n. d.	$\cup$	$f(c_1)$	$\cap$	$f(c_2)$	$\cup$	$f(c_3)$	$\cap$	n. d.

(D)

x	-5		c_1		c_2		5
$f''(x)$	n. d.	$+$	0	$+$	0	$-$	n. d.
$f(x)$	n. d.	$\cup$	$f(c_1)$	$\cup$	$f(c_2)$	$\cap$	n. d.

Apesar do gráfico da função representada na opção **(D)** ter dois zeros, um deles não está associado a uma mudança de sinal, pelo que o gráfico da função f tem apenas um ponto de inflexão.

Assim, a opção **(A)** é a correta, pois o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.

Resposta correta: (**A**)

Assíntotas

6.

Como a reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico da função f e o domínio de f é $\mathbb{R}^+$,

tem-se $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 2$ e consequentemente $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{2}$.

Então,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-1}{f(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(6-\frac{1}{x}\right)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{f(x)}\times\left(6-\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{f(x)}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\left(6-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\times\left(6-\frac{1}{+\infty}\right) = \frac{1}{2}\times(6-0) = 3$$

Resposta correta: **(C)**

7.

Geometria

Equações de retas e planos

Como o plano α é definido pela equação $x - y - 2z = 3$, o vetor, $\vec{n}$, de coordenadas $(1, -1, -2)$, é um vetor normal ao plano α.

Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r. Como a reta r é perpendicular ao plano α, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são colineares.

Os vetores diretores das retas definidas pelas condições respeitantes às opções **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** têm coordenadas $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$ e $(1, -1, 1)$, respetivamente.

As opções **(A)** e **(C)** não estão corretas porque a segunda coordenada de um vetor diretor dessas retas é nula, não sendo por isso colineares a $\vec{n} = (1, -1, -2)$.

A opção **(D)** não está correta pois os quocientes entre as coordenadas correspondentes dos vetores diretor da reta e normal ao plano não são iguais, isto é, o vetor diretor da reta não é colinear a $\vec{n}$.

Assim, das alternativas apresentadas, só a condição $-x + 5 = y + 3 = \frac{z + 3}{2}$, que é equivalente a $\frac{x - 5}{-1} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z + 3}{2}$, pode definir a reta r.

Confirmemos que a opção **(B)** é a correta:

Os vetores $\vec{r} = (-1, 1, 2)$ e $\vec{n} = (1, -1, -2)$ têm todas as coordenadas não nulas e os quocientes entre as coordenadas correspondentes são iguais, isto é, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são colineares.

O ponto $A(2, 0, 3)$ pertence à reta r pois, substituindo as coordenadas do ponto A nas equações $-x + 5 = y + 3 = \frac{z + 3}{2}$, obtém-se a proposição:

$-2 + 5 = 0 + 3 = \frac{3 + 3}{2} \Leftrightarrow 3 = 3 = 3$, que é uma proposição verdadeira.

Assim, a condição $-x + 5 = y + 3 = \frac{z + 3}{2}$ define a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A.

Resposta correta: (**B**)

8.

Sejam $\arg(w)$ o argumento principal de w, isto é, o argumento de w no intervalo $]-\pi, \pi]$ e W a sua imagem geométrica.

Como w é um número complexo cuja imagem geométrica, W, pertence ao 4.º quadrante, podemos escrever $w = \rho cis(\theta)$, onde $\rho = |w|$ e $\theta = \arg(w)$ com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

Então, $-2iw = 2cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times |w| cis(\theta) \Leftrightarrow -2iw = 2|w| cis\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

Como $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, então:

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{2} < 0 - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi < \theta - \frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}$$

Logo, o ângulo de amplitude $\theta - \frac{\pi}{2}$ pertence ao 3.º quadrante e portanto o número complexo igual a $-2iw$ só pode ser z_3 ou z_4.

Como $|-2iw| = |-2i| \times |w| = 2 \times |w|$, por observação da figura, concluímos que o número complexo igual a $-2iw$ só pode ser z_4.

Resposta correta: (**D**)

GRUPO II

N.os complexos

Operações

1.

1.1.

O complexo z_1, na forma algébrica, é dado por:

$$z_1 = \frac{1-i}{2i} - \frac{1}{i} = \frac{1-i-2}{2i} = \frac{(-1-i)\times(-2i)}{2i\times(-2i)} = \frac{(-1-i)\times(-2i)}{4} = \frac{2i-2}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Para escrever z_1 na forma trigonométrica, vem:

- $\left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Sendo θ um argumento de z_1, tem-se que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \text{ e } \theta \in 2.^{\circ} \text{ quadrante, portanto } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ (argumento positivo mínimo).}$$

Logo, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} cis \frac{3\pi}{4}$.

$$\overline{z_2} = cis\left(-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Assim,

$$z_1^4 \times \overline{z_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} cis \frac{3\pi}{4}\right)^4 \times cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \times cis(3\pi) \times cis\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \times cis(\pi) \times cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

A imagem geométrica de $z_1^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se o seu argumento for da forma $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Como $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, para $k = 1$, concluímos que a imagem geométrica de $z_1^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Operações

1.2.

Sabe-se que $\alpha \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ e que $w = \operatorname{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha$.

Então escrevendo w na forma trigonométrica, vem:

$$|w| = \left|\operatorname{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha\right| = \sqrt{(\operatorname{sen}(2\alpha))^2 + \left(2\cos^2\alpha\right)^2} = \sqrt{(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2 + 4\cos^4\alpha} =$$

$$= \sqrt{4\operatorname{sen}^2\alpha \times \cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha} = \sqrt{4\cos^2\alpha\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right)} = 2|\cos\alpha| \underset{(1)}{=} 2\cos\alpha$$

(1) Como $\alpha \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ então $\cos\alpha > 0$, pelo que: $|\cos\alpha| = \cos\alpha$.

Sendo θ um argumento de w, tem-se: $\operatorname{tg}\theta = \frac{2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Pelo que $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Assim, o complexo w na forma trigonométrica é dado por:

$w = 2\cos\alpha \times cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ com $\alpha \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Probabilidades

2.

2.1.

Probabilidade condicionada

Sejam:

A: "o aluno escolhido é rapaz" e B: "o aluno escolhido está inscrito no desporto escolar"

Pretende-se calcular $P\left(\overline{A}\,|B\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)}$.

Como 60% dos alunos da turma são rapazes, tem-se $P(A) = 0{,}6$.

Como 80% dos alunos da turma estão inscritos no desporto escolar, tem-se $P(B) = 0{,}8$.

Como 20% dos rapazes não estão inscritos no desporto escolar, tem-se $P\left(\overline{B}\,|A\right) = 0{,}2$.

$$P\left(\overline{B}\,|A\right) = 0{,}2 \Leftrightarrow P\left(\overline{B} \cap A\right) = 0{,}2 \times P(A) \Leftrightarrow P\left(\overline{B} \cap A\right) = 0{,}2 \times 0{,}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{B} \cap A\right) = 0{,}12$$

$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A \cup \overline{B}}\right) = 1 - P\left(A \cup \overline{B}\right) = 1 - P(A) - P\left(\overline{B}\right) + P\left(A \cap \overline{B}\right) =$$

$$= 1 - 0{,}6 - 0{,}2 + 0{,}12 = 0{,}32$$

Assim, $P\left(\overline{A}\,|B\right) = \frac{0{,}32}{0{,}8} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\,|B\right) = \frac{2}{5}$.

A probabilidade de um aluno dessa turma ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar é, $\frac{2}{5}$.

2.2.

Combinatória

Dos alunos da turma do 12.º ano, 80% estão inscritos no desporto escolar. Como a turma tem 25 alunos, o número de alunos inscritos no desporto escolar é 20, pois $0{,}8 \times 25 = 20$. Deste modo, 5 alunos não estão inscritos no desporto escolar.

Para escolher, ao acaso, 3 alunos dessa turma para a representarem num evento do desporto escolar, podem utilizar-se combinações, pois a ordem não interessa.

Assim, o número de casos possíveis é igual a ${}^{25}C_3$ (número de grupos distintos, de 3 alunos escolhidos entre os 25 alunos).

Existem duas hipóteses em alternativa para que os grupos de 3 alunos escolhidos tenham pelo menos 2 inscritos no desporto escolar.

Primeira hipótese: os 3 alunos estão inscritos no desporto escolar.

Segunda hipótese: apenas 2 alunos estão inscritos no desporto escolar.

Para a primeira hipótese existem ${}^{20}C_3$ maneiras diferentes de escolher os grupos de 3 alunos entre os 20 alunos inscritos no desporto escolar.

Para a segunda hipótese existem ${}^{20}C_2 \times {}^{5}C_1$ maneiras diferentes de escolher os grupos de 3 alunos (2 dos 20 inscritos e 1 dos 5 não inscritos no desporto escolar). O número de casos favoráveis é então ${}^{20}C_3 + {}^{20}C_2 \times {}^{5}C_1$.

Usando a lei de Laplace, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{{}^{20}C_3 + {}^{20}C_2 \times {}^{5}C_1}{{}^{25}C_3} = \frac{1140 + 190 \times 5}{2300} = \frac{2090}{2300} \approx 0{,}91 .$$

3.

Axiomática

Do enunciado sabe-se que os acontecimentos contrários, A e $\overline{A}$, são equiprováveis, pelo que:

$P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$.

Tem-se:

$$2P(A \cup B) \underset{(1)}{=} 2\big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) \underset{(2)}{=} 2\big(P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)\big) =$$

$$= 2\big(P(A) + P(B)(1 - P(A))\big) = 2P(A) + 2P(B)P(\overline{A}) =$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + 2P(B) \times \frac{1}{2} = 1 + P(B)$$

(1) Propriedade da probabilidade da união de acontecimentos;

(2) A e B são acontecimentos independentes;

Geometria

Equações de retas e planos

4.

Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, então A tem coordenadas $(x, 0, 0)$, com $x \in \mathbb{R}^+$.

Como A pertence à reta AD, definida por $\frac{x-3}{3} = -\frac{z}{5} \wedge y = 0$, tem-se:

$$\frac{x-3}{3} = -\frac{0}{5} \wedge 0 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Portanto, A tem coordenadas $(3, 0, 0)$.

Como o ponto B pertence ao plano xOy, tem ordenada -3 e abcissa igual à do ponto A, então as coordenadas do ponto B são $(3, -3, 0)$.

Como o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz, então D tem coordenadas $(0, 0, z)$, com $z \in \mathbb{R}^+$.

Como D pertence à reta AD, definida por $\frac{x-3}{3} = -\frac{z}{5} \wedge y = 0$, tem-se:

$$\frac{0-3}{3} = -\frac{z}{5} \wedge 0 = 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{3} = -\frac{z}{5} \Leftrightarrow z = 5$$

Portanto, D tem coordenadas $(0, 0, 5)$.

Como o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy, então C tem coordenadas $(0, y, 0)$, com $y \in \mathbb{R}^-$.

Como $\overrightarrow{CD} = D - C = (0, 0, 5) - (0, y, 0) = (0, -y, 5)$ e $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 = 41$, tem-se:

$$\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 = 41 \Leftrightarrow \left(\sqrt{y^2 + 25}\right)^2 = 41 \Leftrightarrow y^2 + 25 = 41 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = -4 \vee y = 4.$$

Assim, $y = -4$ pois $y \in \mathbb{R}^-$ e portanto as coordenadas do ponto C são $(0, -4, 0)$.

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor, não nulo, normal ao plano que contém a face $[BCD]$.

Então, o vetor $\vec{n}$ é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Os vetores $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são vetores não colineares do plano BCD.

$\overrightarrow{CB} = B - C = (3, -3, 0) - (0, -4, 0) = (3, 1, 0)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (0, 0, 5) - (0, -4, 0) = (0, 4, 5)$

Tem-se,

$$\begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3, 1, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (0, 4, 5) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 4b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3}b \\ c = -\frac{4}{5}b \end{cases}$$

Concluímos que as coordenadas de um vetor normal ao plano BCD são da forma $\left(-\frac{1}{3}b, b, -\frac{4}{5}b\right)$, onde b é um número real não nulo. Fazendo, por exemplo, $b = -15$ obtém-se um vetor, $\vec{n}$, normal ao plano BCD de coordenadas $(5, -15, 12)$.

5.

5.1.

A função f é contínua em $x = 2$ se $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe e $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, ou seja,

a função f é contínua em $x = 2$ se, e só se, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$.

Comecemos por calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(x e^{x-2} \right) = 2 \times e^0 = 2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(2 - x)}{x^2 + x - 6} + k \right) = k + \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(2 - x)}{x^2 + x - 6} \right)$$, indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Fazendo a mudança de variável: $y = 2 - x \Leftrightarrow x = 2 - y$ e como $x \to 2^+$ então, $y \to 0^-$.

Assim,

$$k + \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(2 - x)}{x^2 + x - 6} \right) = k + \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(y)}{(2 - y)^2 + 2 - y - 6} \right) =$$

$$= k + \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(y)}{y^2 - 4y + 4 - y - 4} \right) = k + \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(y)}{y^2 - 5y} \right) =$$

$$= k + \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{1}{y - 5} \times \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \right) \underset{(a)}{=} k - \frac{1}{5} \times 1 = k - \frac{1}{5}$$

(a) Limite notável $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Logo, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = k - \frac{1}{5}$.

Como $f(2) = 2 \times e^{(2-2)} = 2 \times e^0 = 2 \times 1 = 2$

e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, determinar k de modo que a função f seja contínua em

$x = 2$ é equivalente a ter:

$$k - \frac{1}{5} = 2 \Leftrightarrow k = 2 + \frac{1}{5} \Leftrightarrow k = \frac{11}{5}.$$

Assíntotas

5.2.

Como o domínio da função f é o intervalo $]-\infty\ ,\ e[$ o gráfico de f admite uma assíntota horizontal se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$. Assim,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x e^{x-2} \right)$, indeterminação do tipo $0 \times \infty$.

Fazendo a mudança de variável:

$y = -x \Leftrightarrow x = -y$ e como $x \to -\infty$, então $-x \to +\infty$ e portanto $y \to +\infty$.

Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x e^{x-2} \right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-y e^{-y-2} \right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-y e^{-(y+2)} \right) =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{-y}{e^{y+2}} \right) = \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{1}{e^2} \times \frac{y}{e^y} \right) = -\frac{1}{e^2} \times \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{e^2} \times \frac{\lim\limits_{y \to +\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\textit{limite notável}}} = -\frac{1}{e^2} \times \left(\frac{1}{+\infty} \right) = -\frac{1}{e^2} \times 0 = 0$$

Conclui-se que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$.

1.ª derivada

6.

6.1.

Para estudar a função g quanto à monotonia e existência de extremos, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de g.

$$g'(x) = \frac{(1+\ln(x))' \times x^2 - (x^2)' \times (1+\ln(x))}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (1+\ln(x))}{x^4} =$$

$$= \frac{x - 2x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{-x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x(-1-2\ln(x))}{x^4} = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$$

Como $D_g = \mathbb{R}^+$ e $g'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$, então a função g' tem domínio $\mathbb{R}^+$.

Calculemos os zeros da derivada da função g, para $x > 0$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1-2\ln(x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -1 - 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudemos o sinal de g', para $x > 0$:

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-1-2\ln(x)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow -1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) < \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$$

Como $x > 0$, então $x \in \left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$.

Estudando a variação de sinal da primeira derivada e relacionando com a monotonia da função g, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	n. d.	+	0	−
$g(x)$	n. d.	↗	$\frac{e}{2}$	↘

Concluímos que a função g:

- é crescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e decrescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$;
- tem um máximo relativo para $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

Resolução gráfica

6.2.

As coordenadas do ponto A são da forma $\left(x_A\ ,\ 0\right)$, em que x_A é o zero de g.

$$g(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{1 + \ln x}{x^2} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

Assim, a abcissa do ponto A é e^{-1}, pelo que $A\left(e^{-1}\ ,\ 0\right)$.

O ponto $B\left(x_B\ ,\ y_B\right)$ resulta da intersecção do gráfico da função com a reta de equação $y = mx$, com $m < 0$, pelo que B está situado no 4.º quadrante ($x_B > 0$ e $y_B < 0$).

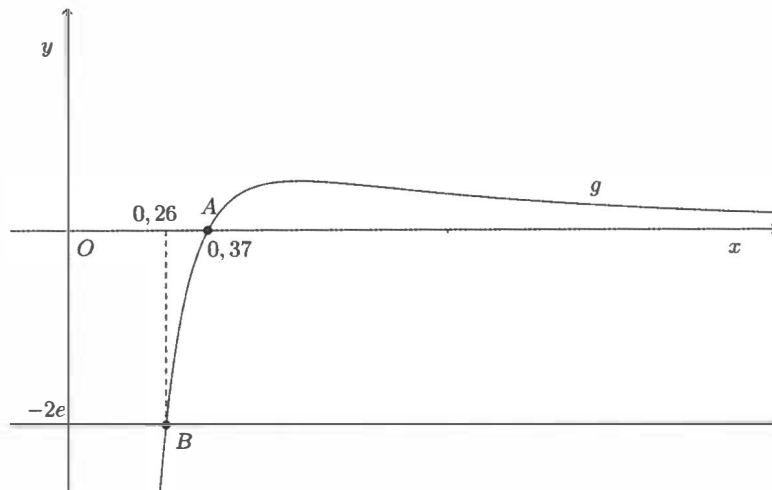
Por outro lado, a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1 e é dada por:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2}$$ e assim,

$$1 = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} \Leftrightarrow |y_B| = \frac{2}{\overline{OA}}$$

Como $\overline{OA} = e^{-1}$, vem $y_B = 2e \vee y_B = -2e$

Sendo B um ponto do 4.º quadrante, então $y_B = -2e$.

A abcissa do ponto B, x_B, pode ser obtida resolvendo, graficamente, a equação $g(x) = y_B$, isto é, determinando as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico da função g com a reta de equação $y = -2e$.

Recorrendo à calculadora gráfica, concluímos que os valores aproximados às centésimas das abcissas dos pontos A e B são, respetivamente, 0,37 e 0,26.

7.

Assíntotas, 1.ª derivada e Teorema de Bolzano

Da função f sabemos que: tem domínio $\mathbb{R}$; as imagens de -3 e de 5 têm sinais contrários; a derivada de f existe e é sempre positiva para todo o valor real de x, não nulo; e o gráfico de f tem duas assíntotas, uma vertical de equação $x = 0$ e uma assíntota não vertical, em $-\infty$, de equação $y = 2x$, uma vez que $\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 0$.

A afirmação I é falsa. Do enunciado decorre que f não é contínua no ponto $x = 0$, dado que a existência da assíntota de equação $x = 0$ faz com que $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, logo $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$. Assim, a função f não é contínua no intervalo $[-3\ ,\ 5]$, não verificando uma das condições do teorema de Bolzano.

A afirmação II é falsa. Como já foi referido anteriormente, o gráfico de f, em $-\infty$, tem uma assíntota não vertical de equação $y = 2x$, não podendo existir outra assíntota não vertical em $-\infty$, nomeadamente uma assíntota horizontal.

A afirmação III é verdadeira. Tem-se que: $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, em particular, $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in]0\ ,\ +\infty[$, pelo que se conclui que f é crescente em $]0\ ,\ +\infty[$.

FIM

GRUPO I

1.

Os 2 rapazes devem estar sentados nas extremidades do banco. Há 2 maneiras de isso acontecer. As 4 raparigas podem estar sentadas nos 4 lugares do meio. Há $4!$ maneiras diferentes de elas se sentarem.

Logo: $2 \times 4! = 48$

Resposta correta: (**C**)

2.

Como:

$P(\overline{B}) = 0{,}7$ e $P(B) = 1 - P(\overline{B})$, temos $P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$$

Então,

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8\,.$$

Resposta correta: (**C**)

3.

$$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3\left(\frac{3^k}{3^2}\right) = \log_3\left(3^{k-2}\right) = k - 2$$

Resposta correta: (**B**)

4.

Como $\lim u_n = \lim\left(n^2\right) = +\infty$, então

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\textit{limite notável}} = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0$$

Resposta correta: (**A**)

Funções trigonométricas

5.

A área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida subtraindo a área do triângulo $[OAB]$ à área do triângulo $[OCD]$.

Assim,

$$A_{[OCD]} = \frac{\overline{CD} \times \overline{OC}}{2} = \frac{\text{tg}\,\alpha \times 1}{2} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2}$$

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\text{sen}\,\alpha \times \cos\alpha}{2}$$

$$A_{[ABCD]} = A_{[OCD]} - A_{[AOB]} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\text{sen}\,\alpha \times \cos\alpha}{2}$$

E como,

$$\frac{\text{sen}\,\alpha \times \cos\alpha}{2} = \frac{2\,\text{sen}\,\alpha \times \cos\alpha}{2 \times 2} = \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4}$$

temos que:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\text{sen}\,\alpha \times \cos\alpha}{2} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4}$$

Resposta correta: (**B**)

N.os complexos

Conjuntos e condições

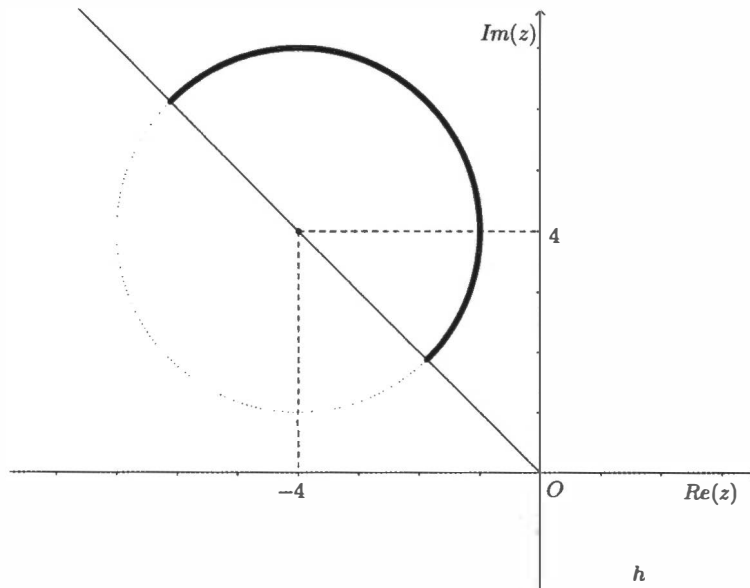
6.

Temos que:

$|z + 4 - 4i| = 3 \Leftrightarrow |z - (-4 + 4i)| = 3$

Esta condição representa, no plano complexo, o conjunto dos pontos cuja distância ao ponto de coordenadas $(-4\ ,\ 4)$ é igual a 3, ou seja, a circunferência de centro em $(-4\ ,\ 4)$ e raio 3.

A condição $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ representa o conjunto de pontos cujos argumentos estão compreendidos entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, fazendo a intersecção dos dois conjuntos, obtemos a semicircunferência representada na figura:

Como o perímetro da circunferência $= 2 \times \pi \times 3 = 6\pi$

então o comprimento pedido é: $\dfrac{6\pi}{2} = 3\pi$.

Resposta correta: (**C**)

7.

Geometria

Equações de retas e planos

Como o triângulo $[\,ABC\,]$ é equilátero, então o ângulo ABC tem de amplitude 60° .

Assim, o declive da reta AB é: $m = \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$

Logo, a reta AB será uma reta do tipo: $y = \sqrt{3}x + b$

Como o ponto B de coordenadas $(1\ ,\ 0)$ pertence a esta reta, temos:

$0 = \sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}$

Logo, a reta AB tem por equação: $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

Resposta correta: (**D**)

8.

Sucessões

Sucessões definidas por recorrência

Recorrendo à definição da sucessão (u_n) , temos que:

$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$

$u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 4$

Resposta correta: (**B**)

N.os complexos

Operações

GRUPO II

1.

Seja $w_1 = -2 + 2i^{19}$

Temos que,

$i^{19} = i^{16} \times i^3 = i^3 = -i$, então $w_1 = -2 + 2i^{19} \Leftrightarrow w_1 = -2 + 2 \times (-i) \Leftrightarrow w_1 = -2 - 2i$.

Escrevendo w_1 na forma trigonométrica, vem:

- $|w_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Como a imagem geométrica de w_1 é o ponto de coordenadas $(-2\ ,\ -2)$, que pertence ao 3.º quadrante, então um argumento de w_1 é θ que pertence ao 3.º quadrante. Assim, $\text{tg}\theta = 1$, pelo que um argumento de w_1 é $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Logo, $w_1 = 2\sqrt{2}\, cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Substituindo em z, temos:

$$z = \frac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2}\, cis\theta} = \frac{2\sqrt{2}\, cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\, cis\theta} = \frac{2cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{cis\theta} = 2cis\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right)$$

Para que $z = 2cis\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right)$ seja um imaginário puro, terá de ser verdadeira a igualdade $\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Tem-se então:

$$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende determinar os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0\ ,\ 2\pi[$, vamos atribuir valores inteiros a k.

Para $k = 0$ vem $\theta = \frac{3\pi}{4}$;

Para $k = -1$ vem $\theta = \frac{3\pi}{4} + \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$.

Os valores de θ são, $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

2.

2.1.

Consideremos os acontecimentos:

H: "o funcionário escolhido é homem" e C: "o funcionário escolhido reside em Coimbra".

Pretende-se calcular $P\left(\overline{H} \mid C\right) = \dfrac{P\left(\overline{H} \cap C\right)}{P(C)}$.

Como:

- 60% dos funcionários da empresa residem fora de Coimbra, tem-se $P\left(\overline{C}\right) = 0{,}6$.
- o número de homens é igual ao número de mulheres, tem-se $P(H) = P\left(\overline{H}\right) = 0{,}5$.
- 30% dos homens residem fora de Coimbra, tem-se $P\left(\overline{C} \mid H\right) = 0{,}3$.

Determinemos $P\left(\overline{C} \cap H\right)$, $P(H \cap C)$ e $P\left(\overline{H} \cap C\right)$,

- $$P\left(\overline{C} \mid H\right) = 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{C} \cap H\right)}{P(H)} = 0{,}3 \Leftrightarrow P\left(\overline{C} \cap H\right) = 0{,}3 \times P(H) \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow P\left(\overline{C} \cap H\right) = 0{,}3 \times 0{,}5 \Leftrightarrow P\left(\overline{C} \cap H\right) = 0{,}15$$

- $$P\left(\overline{C} \cap H\right) + P(H \cap C) = P(H) \Leftrightarrow P(H \cap C) = P(H) - P\left(\overline{C} \cap H\right) \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow P(H \cap C) = 0{,}50 - 0{,}15 \Leftrightarrow P(H \cap C) = 0{,}35$$

- Como $P\left(\overline{C}\right) = 0{,}6$ então $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
  $$P\left(\overline{H} \cap C\right) + P(H \cap C) = P(C) \Leftrightarrow P\left(\overline{H} \cap C\right) = P(C) - P(H \cap C) \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow P\left(\overline{H} \cap C\right) = 0{,}40 - 0{,}35 \Leftrightarrow P\left(\overline{H} \cap C\right) = 0{,}05$$

Assim, $P\left(\overline{H} \mid C\right) = \dfrac{P\left(\overline{H} \cap C\right)}{P(C)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}40} = 0{,}125 = \dfrac{1}{8}$.

A probabilidade de o funcionário escolhido dessa empresa ser mulher, sabendo que reside em Coimbra, é $\dfrac{1}{8}$.

Combinatória

2.2.

Seja C o acontecimento "O funcionário escolhido reside em Coimbra". Sabe-se que: $P(C)=0,4$.

Como a empresa tem 80 funcionários, então 32 residem em Coimbra, pois $0,4 \times 80 = 32$.

Pretende-se determinar a probabilidade de, num grupo de 3 funcionários, escolhidos ao acaso, haver no máximo 2 a residir em Coimbra, ou seja, haver 2, ou 1, ou nenhum a residirem em Coimbra.

O número de casos possíveis é dado por ${}^{80}C_3$, que corresponde ao número de grupos que é possível formar com 3 funcionários escolhidos de entre os 80 funcionários da empresa.

O número de casos favoráveis é dado por ${}^{80}C_3 - {}^{32}C_3$ em que:

- ${}^{80}C_3$ representa o número total de grupos (número de casos possíveis)
- ${}^{32}C_3$ representa o número de grupos de 3 funcionários escolhidos de entre os 32 que residem em Coimbra.

Assim, a diferença ${}^{80}C_3 - {}^{32}C_3$ corresponde ao número de grupos de 3 funcionários, sendo que, em cada grupo, existem no máximo 2 funcionários a residir em Coimbra.

De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis e o espaço de resultados é finito.

Portanto, a probabilidade pedida é dada por: $\dfrac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$.

Funções

3.

Função exponencial

3.1.

Determinemos o raio da esfera, r.

Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16 cm.

Por outro lado a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada em função de t, por $d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t}$. No instante inicial a esfera encontra-se na base do recipiente, pelo que a distância do centro da base ao ponto P é dada por:

$d(0) = 10 + (5 - 0)e^{-0,05 \times 0} = 10 + 5 = 15$

Assim, o raio da esfera é dado por: $r = (16 - 15) = 1$ cm.

O volume da esfera é dado por: $V = \dfrac{4}{3}\pi \times 1^3$.

O valor do volume arredondado às centésimas é dado por: $V \approx 4,19 \text{ cm}^3$.

3.2.

Para determinar o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, comecemos por determinar a expressão analítica da primeira derivada de d .

$$d'(t) = \left(10 + (5 - t)e^{-0,05t}\right)' = (5 - t)' e^{-0,05t} + \left(e^{-0,05t}\right)'(5 - t) =$$

$$= -e^{-0,05t} - 0,05e^{-0,05t}(5 - t) = e^{-0,05t}(-1 - 0,25 + 0,05t) =$$

$$= e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t)$$

Como $D_d = \mathbb{R}_0^+$ e $d'(t) = e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t)$ então a função d' tem domínio $\mathbb{R}_0^+$.

Determinemos os zeros da função derivada, com $t \geq 0$:

$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t) = 0 \Leftrightarrow -1,25 + 0,05t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1,25}{0,05} \Leftrightarrow t = 25$$

Como $e^{-0,05t}$ é sempre positivo, então o sinal de $d'(t)$ depende apenas do sinal de $-1,25 + 0,05t$. Assim, com $t \geq 0$:

$$d'(t) > 0 \Leftrightarrow -1,25 + 0,05t > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1,25}{0,05} \Leftrightarrow t > 25$$

Estudando a variação de sinal da primeira derivada e relacionando com a monotonia da função d , temos:

t	0		25	$+\infty$
$d'(t)$	$-$	$-$	0	$+$
$d(t)$	15	↘	$d(25)$	↗

Podemos concluir que:

A distância do centro da esfera ao ponto P é mínima no instante $t = 25$ segundos.

Assíntotas

4.

4.1.

A função f é contínua no intervalo $\left]-\infty\,,\,\frac{1}{2}\right[$ por ser o quociente entre duas funções contínuas.

A função f é contínua no intervalo $\left]\frac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$ por ser o produto entre duas funções contínuas.

Uma vez que a função f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, apenas a reta de equação $x=\frac{1}{2}$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de f.

Tem-se:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}\right);\text{ indeterminação do tipo } \frac{0}{0}.$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y+\frac{1}{2}$.

Como $x\to\frac{1}{2}^-$ então $y\to 0^-$ e assim,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1}\right) = \lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^{y+\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}}{2\left(y+\frac{1}{2}\right)-1}\right) = \lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^y-1\right)}{2y}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\textit{limite notável}} = \frac{\sqrt{e}}{2}\times 1 = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

Como f é contínua à direita de $\frac{1}{2}$, pois $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)\in\mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

2.ª derivada

4.2.

Para efetuar, no intervalo $\left]\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$, o estudo das concavidades do gráfico de f e averiguar a existência de pontos de inflexão, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de f naquele intervalo.

Cálculo da primeira derivada:

$$f'(x) = \left((x+1)\ln x\right)' = (x+1)'\ln x + (x+1)(\ln x)' = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

Cálculo da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right)' = (\ln x)' + (1)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Determinemos os zeros da segunda derivada de f no intervalo $\left]\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, o zero de f'' no intervalo $\left]\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ é $x = 1$.

Estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , temos:

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f''(x)$	n. d.	$-$	0	$+$
$f(x)$	n. d.	$\cap$	0	$\cup$

Podemos então concluir que o gráfico de f tem:

- a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]$;
- a concavidade voltada para cima no intervalo $[1\ ,\ +\infty[$;
- um ponto de inflexão de coordenadas $(1\ ,\ 0)$.

Resolução gráfica e Teorema de Bolzano

4.3.

Consideremos agora a função f , definida apenas em $\left]\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$.

Definamos a função h por meio de $h(x) = f(x) - 3$.

A função h é contínua em $\left]\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ por ser a diferença entre duas funções contínuas:

– a função produto de uma função afim $y = x + 1$ por uma função logarítmica $y = \ln x$;

– a função constante $y = 3$.

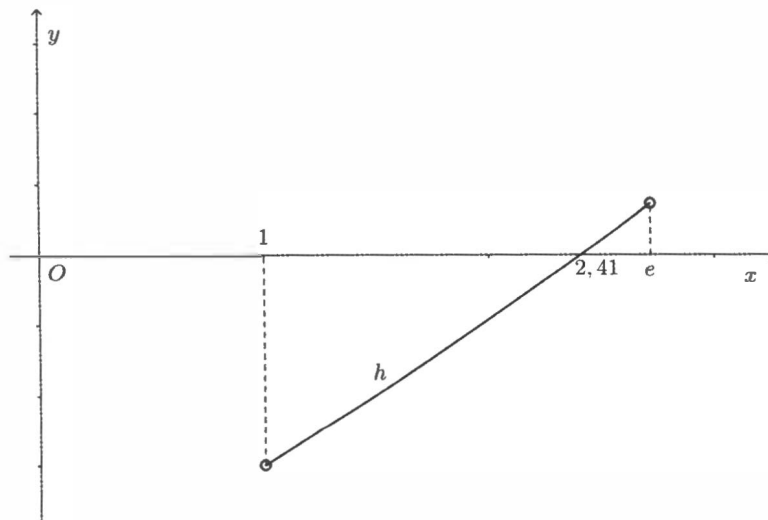
Então, h é contínua em $[1\ ,e] \subset \left]\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$. Temos também:

$h(1) = f(1) - 3 = 0 - 3 = -3$;

$h(e) = (e + 1)\ln e - 3 = e + 1 - 3 = e + 2$.

Ora, $h(1) \times h(e) < 0$

Como a função h é contínua em $[1\ ,\ e]$ e $h(1) \times h(e) < 0$ então, pelo corolário do teorema de Bolzano, podemos afirmar que existe pelo menos um ponto c do intervalo $]1\ ,\ e[$ tal que $h(c) = 0$.

Usando uma calculadora gráfica, tentemos determinar aproximadamente esse ponto c .

Numa janela de visualização, em que no eixo das abcissas incluímos um intervalo que contém o intervalo $]1\ ,\ e[$, obtemos o gráfico indicado. Observamos que a função h tem apenas um zero, o que corresponde à realidade, pois no intervalo $[1\ ,\ e]$ a função h é estritamente crescente e é contínua, logo a solução da equação $h(x) = 0$ é única.

Concluímos assim que no intervalo $[1\ ,\ e]$ a equação $f(x) = 3$ tem uma só solução, $x = a$ com $a \approx 2{,}41$.

Geometria

5.

5.1.

Equações de retas e planos

Como o plano que se procura é paralelo ao plano α, então um vetor normal ao plano será $\overrightarrow{n} = (1\ ,\ -2\ ,\ 1)$, pelo que a equação do plano é da forma $x - 2y + z + d = 0$.

Como o ponto A pertence ao plano, temos que:

$$0 - 2 \times 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Assim, uma possível equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α é:

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

5.2.

Lugares geométricos

Dado que o segmento de reta $[AB]$ é diâmetro da superfície esférica, então o ponto médio deste segmento será o centro da circunferência, pelo que:

$C = M_{[AB]}$, isto é, $C\ (2\ ,\ 0\ ,\ 1)$.

Além disso, o raio da superfície esférica será:

$$r = \overline{AC} \Leftrightarrow r = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (1-2)^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{4+1} \Leftrightarrow r = \sqrt{5}$$

Assim, uma equação da superfície esférica será:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$$

Produto escalar

5.3.

Este item pode ser resolvido por pelo menos dois processos diferentes.

1.º processo:

Tendo em conta que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \cos\left(B\hat{A}P\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

determinemos as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ e as respetivas normas:

$$\overrightarrow{AB} = (4\ ,0\ ,0) - (0\ ,0\ ,2) = (4\ ,0\ ,-2)$$

$$\overrightarrow{AP} = (4\ ,y\ ,0) - (0\ ,0\ ,2) = (4\ ,y\ ,-2)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{4^2 + y^2 + (-2)^2} = \sqrt{20 + y^2}$$

Assim, vem que:

$$(4\ ,0\ ,-2) \cdot (4\ ,y\ ,-2) = \sqrt{20} \times \sqrt{20 + y^2} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 + 4 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{20 + y^2} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{2\sqrt{5}} = \sqrt{20 + y^2}$$

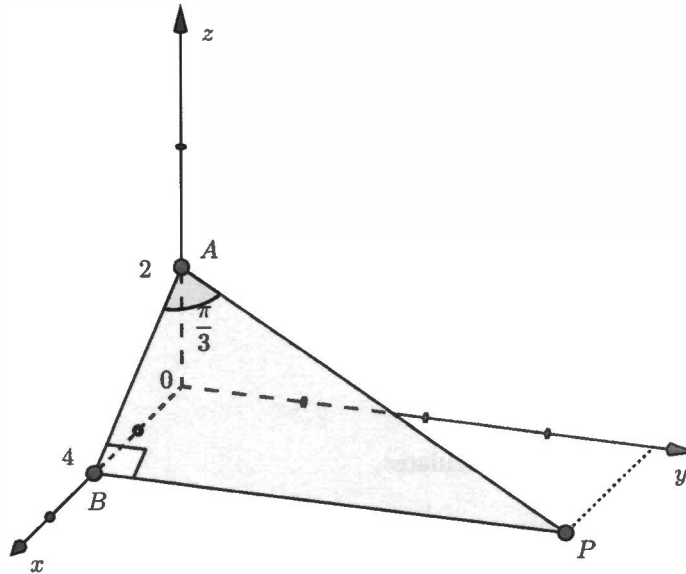
e elevando ambos os membros ao quadrado obtemos

$$\frac{400}{5} = 20 + y^2 \Leftrightarrow 80 = 20 + y^2 \Leftrightarrow 60 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60}$$

Como $y > 0$, então $y = \sqrt{60}$ e assim se conclui que a ordenada do ponto P é $\sqrt{60}$.

2.º processo:

Como $B(4\ ,0\ ,0)$ e $P(4\ ,y\ ,0)$, com $y > 0$, o vetor $\overrightarrow{BP}$ tem coordenadas $(0\ ,y\ ,0)$.

Assim, o vetor $\overrightarrow{BP}$ é um vetor normal ao plano xOz, pelo que a reta BP é perpendicular a esse plano. Deste modo, BP é perpendicular a todas as retas do plano xOz, e portanto é perpendicular à reta $AB \subset xOz$.

Concluímos assim que o triângulo $[ABP]$ é retângulo em B.

Sabe-se que $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$; então, através da trigonometria do triângulo retângulo tem-se:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\left\|\overrightarrow{BP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

Como $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{20}$ e $\left\|\overrightarrow{BP}\right\| = |y| = y$, pois $y > 0$, então

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{y}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \times \sqrt{20} \Leftrightarrow y = \sqrt{60}$$

Daqui se conclui que a ordenada do ponto P é $\sqrt{60}$.

Funções

1.ª derivada

6.

Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, então $m_r = f'(a)$.

Assim, $f'(x) = \left(1 - \cos(3x)\right)' \Leftrightarrow f'(x) = 3\text{sen}(3x)$ e portanto:

$m_r = f'(a) \Leftrightarrow m_r = 3\text{sen}(3a)$.

Além disso, sendo a reta s tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$, então

$m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$.

Como $g'(x) = \left(\text{sen}(3x)\right)' \Leftrightarrow g'(x) = 3\cos(3x)$ temos:

$$m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow m_s = 3\cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow m_s = 3\cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_s = -3\text{sen}(3a)$$

Como as retas r e s são perpendiculares,

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow 3\text{sen}(3a) = -\frac{1}{-3\text{sen}(3a)} \Leftrightarrow 9\text{sen}^2(3a) = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2(3a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(3a) = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \text{sen}(3a) = \pm\frac{1}{3}$$

Como $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$, conclui-se que $3a \in 3.^\text{o}$ quadrante, pelo que $\text{sen}(3a) < 0$.

Logo, $\text{sen}(3a) = -\frac{1}{3}$, como se queria demonstrar.

FIM

GRUPO I

1.

Considerando que:

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1 \Leftrightarrow a+2a+0{,}4=1 \Leftrightarrow 3a+0{,}4=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{0{,}6}{3} \Leftrightarrow a=0{,}2$$

Consequentemente, o valor médio da variável aleatória X é:

$\mu = 1\times 0{,}2 + 2\times 0{,}4 + 3\times 0{,}4 = 2{,}2$.

Resposta correta: (**B**)

2.

Segundo a definição de probabilidade condicionada, $P(A|B)$ é a probabilidade de a bola retirada ser preta sabendo que saiu uma bola com número par. Uma vez que há quatro bolas pares e só duas são pretas, então $P(A|B)=\frac{1}{2}$.

Resposta correta: (**B**)

3.

Sabe-se que: $\log_b a = \frac{1}{3}$.

Calculemos o valor de $\log_a(a^2 b)$ usando as propriedades dos logaritmos:

$$\log_a(a^2 b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \frac{\log_a b}{\log_b a} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2+3=5$$

Resposta correta: (**D**)

Continuidade

4.

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $x=0$, pelo que $f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

Temos que:

$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=2+e^k$.

Calculemos o $\lim_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=2+1=3\text{, pois }\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1.$$

Considerando a igualdade $2+e^k=3$ e resolvendo a equação em ordem a k, obtemos:

$2+e^k=3 \Leftrightarrow e^k=1 \Leftrightarrow k=0$.

Resposta correta: (**A**)

Funções trigonométricas e 2.ª derivada

5.

Sendo $f(x)=3\text{sen}^2(x)$, então:

$$f'(x)=\left(3\text{sen}^2(x)\right)'=3\times 2\ \text{sen}(x)\cos(x)=3\ \text{sen}(2x)$$

$$f''(x)=\left(3\ \text{sen}(2x)\right)'=3\cos(2x)\times 2=6\cos(2x)$$

Resposta correta: (**C**)

N.os complexos

Operações

6.

$|z|=\overline{OB}$ e, como o triângulo é equilátero, $\overline{OA}=\overline{OB}=1$; logo, $|z|=1$.

Como o triângulo é equilátero, todos os ângulos internos são iguais e têm de amplitude $\frac{\pi}{3}$ rad.

Como o ângulo AOB é um desses ângulos internos, um argumento de z é dado por:

$\arg(z)=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$. Assim, $z=1cis\frac{5\pi}{3}$.

Resposta correta: (**D**)

7.

Geometria

Equações de retas e lugares geométricos

A circunferência de equação $x^2 + (y-1)^2 = 2$ tem o seu centro no ponto $C(0\ ,\ 1)$.

Para obtermos a abcissa do ponto A, vamos considerar os pontos da circunferência de ordenada nula.

$x^2 + (y-1)^2 = 2 \wedge y=0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \wedge y=0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge y=0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge y=0$

Como o ponto A tem abcissa positiva, então terá de coordenadas $(1\ ,\ 0)$.

Considerando:

$\overrightarrow{CA} = A - C = (1\ ,\ 0) - (0\ ,\ 1) = (1\ ,\ -1)$

O declive da reta CA é

$m_{CA} = \frac{-1}{1} = -1$

E como r é perpendicular a CA, pois é tangente à circunferência no ponto A, o seu declive vai ser o simétrico do inverso do declive da reta CA.

Assim,

$m_r = -\frac{1}{-1} = 1$

Logo, a reta r terá uma equação do tipo:

$y = x + b$

Como o ponto A tem de coordenadas $(1\ ,\ 0)$, temos que:

$0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

Portanto, a reta r tem de equação reduzida:

$y = x - 1$

Resposta correta: (**B**)

8.

Sucessões

Monotonia e limitação

A sucessão de termo geral $(-1)^n$ não é monótona, pois os seus termos são alternadamente negativos e positivos.

A sucessão de termo geral $(-1)^n \times n$ não é monótona, pois os seus termos são alternadamente negativos e positivos, e não é limitada, pois é um infinitamente grande.

A sucessão definida por $1 + n^2$ não é limitada, pois é um infinitamente grande positivo.

A resposta correta é a sucessão de termo geral $-\frac{1}{n}$, que como se pode provar analiticamente é monótona crescente e é limitada, sendo -1 um minorante e 0 um majorante do conjunto dos seus termos.

Resposta correta: (**C**)

GRUPO II

N.^os complexos

Potências e raízes

1.

Escrevendo $-1 + i$ na forma trigonométrica, temos $-1 + i = \rho\, cis\theta$, onde:

- $\rho = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$
- θ é um argumento de $-1 + i$ com $\theta \in 2.^\circ$ quadrante e $\text{tg}\theta = -1$, vem $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

  (argumento positivo mínimo).

Assim, $-1 + i = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Substituindo em z_1, temos:

$$z_1 = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2}\, cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow z_1 = cis\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow z_1 = cis\left(\frac{8\pi}{12}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

pelo que $\overline{z_1} = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Assim, usando a fórmula de Moivre, temos que:

$$z^4 = \overline{z_1} \Leftrightarrow z^4 = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right), (k = 0, 1, 2 \text{ e } 3)$$

Para

$$k = 0,\ z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4}\right) = cis\left(-\frac{2\pi}{12}\right) = cis\left(-\frac{\pi}{6}\right);$$

$$k = 1,\ z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = cis\left(\frac{4\pi}{12}\right) = cis\left(\frac{\pi}{3}\right);$$

$$k = 2,\ z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) = cis\left(\frac{10\pi}{12}\right) = cis\left(\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$k = 3,\ z = cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) = cis\left(\frac{16\pi}{12}\right) = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

Portanto, os números complexos z que são solução de $z^4 = \overline{z_1}$ são:

$$S = \left\{ cis\left(-\frac{\pi}{6}\right), cis\left(\frac{\pi}{3}\right), cis\left(\frac{5\pi}{6}\right), cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right\}$$

2.

2.1.

Teremos de determinar os valores de $t \in \left]0\ ,\ 3\right]$ tais que $d(t) = d(0)$.

$$d(t) = d(0) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ 2k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{2}{3} + k,\ 2k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in \left]0\ ,\ 3\right]$ temos para

$k = 0,\ t = 0 \vee t = \frac{2}{3}$

$k = 1,\ t = 2 \vee t = \frac{8}{3}$

pelo que os instantes, diferentes do inicial, em que o ponto P passou pelo ponto A foram aos $\frac{2}{3}s$, $2s$ e $\frac{8}{3}s$.

Teorema de Bolzano

2.2.

A função d é contínua em $[0\ ,\ +\infty[$ por ser a soma entre duas funções contínuas: uma constante e uma trigonométrica.

Assim, como d é contínua em $[0\ ,\ +\infty[$ também é contínua em $[3\ ,\ 4]$.

Calculemos $d(3)$ e $d(4)$:

$$d(3)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi\times 3+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}=0{,}75$$

$$d(4)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi\times 4+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}=1{,}25$$

Ora, $d(3)<1{,}1<d(4)$.

Como a função d é contínua em $[3\ ,\ 4]$ e $d(3)<1{,}1<d(4)$, então pelo teorema de Bolzano, podemos afirmar que existe um ponto c do intervalo $]3\ ,\ 4[$ tal que $d(c)=1{,}1$. Logo, há um instante entre o 3.º e 4.º segundos, após o início da contagem do tempo, em que a distância de P a O foi igual a 1,1 m.

Assíntotas

3.

3.1.

Calculemos os limites de f nos ramos infinitos:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + xe^{x}\right) = 1 + \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right) \underset{(y=-x)}{=} 1 + \lim\limits_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y}\right) =$

$$= 1 - \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^{y}}{y}}\right) = 1 - \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}}_{\textit{limite notável}}} = 1 - 0 = 1$$

Concluímos que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x\to-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x-3) - \ln(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-3}{x}\right) =$

$$= \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)\right) = \ln(1) = 0$$

Podemos assim concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x\to+\infty$.

3.2.

Exponenciais

Dado que $x \in \left]-\infty, 3\right]$, então temos que:

$f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^{x} - 2x > 1 \Leftrightarrow xe^{x} - 2x > 0 \Leftrightarrow x\left(e^{x} - 2\right) > 0$

Determinemos os zeros de $x\left(e^{x} - 2\right)$

$x\left(e^{x} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 2$

Estudando a variação do sinal de $x\left(e^{x} - 2\right)$, vem:

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		3
x	$-$	0	$+$	$\ln 2$	$+$	3
$e^{x} - 2$	$-$	-2	$-$	0	$+$	$e^{3} - 2$
$x\left(e^{x} - 2\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$3\left(e^{3} - 2\right)$

Conclui-se que o conjunto solução de $f(x) - 2x > 1$ é $\left]-\infty, 0\right[\cup \left]\ln 2, 3\right]$.

1.ª derivada

3.3.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4.

$A(4\ ,\ f(4)) \in t$ e o declive da reta t é dado por $m_t = f'(4)$.

Como $f(4) = \ln(4 - 3) - \ln 4 = -\ln 4$, temos que $(4\ ,\ -\ln(4))$ são as coordenadas do ponto de tangência.

Calculemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\ln(x - 3) - \ln x\right)' = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x}$$

pelo que

$$f'(4) = \frac{1}{4 - 3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Assim, temos que a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 4, tem de equação

$$y + \ln 4 = \frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 4 - \ln 4$$

1.ª derivada, 2.ª derivada e continuidade

4.

O gráfico A não pode representar a função f porque se a função f tem derivada finita em todos os pontos do domínio então é contínua em todo o seu domínio, o que não acontece, uma vez que a função representada no gráfico A tem um ponto de descontinuidade.

Tendo em conta que $f''(x) < 0,\ \forall\ x \in\ ]-\infty\ ,\ 0[$, então nesse intervalo o gráfico da função f deveria apresentar a concavidade voltada para baixo, o que não se verifica no gráfico B e por isso se exclui.

Finalmente, exclui-se o gráfico C porque se $f'(0) > 0$ então a reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa zero deveria ter declive positivo, o que não se verifica.

5.

Sabendo que $P(A) \neq 0$, tem-se:

$P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + 1 - P(B) - P(A \cap \overline{B}) - 1 + P(B) = P(B \cap A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap \overline{B}) = P(B \cap A) \Leftrightarrow$

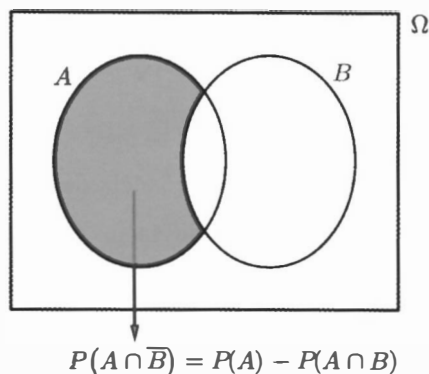
$\Leftrightarrow P(A) - (P(A) - P(A \cap B)) = P(B \cap A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A) + P(A \cap B) = P(B \cap A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B \cap A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A \cap B)$

Como se queria demonstrar.

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

6.

6.1.

Como a pirâmide que integra o sólido é regular, a projeção ortogonal de V no plano que contém a base coincide com o centro geométrico da base da pirâmide. V pertence ao plano de equação $x = 1$ e $y = 1$, pelo que as coordenadas do ponto V são $(1, 1, z), z \in \mathbb{R}$.

Como $V(1, 1, z)$ pertence ao plano PQV podemos calcular a cota do ponto:

$$6 \times 1 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 6$$

Assim, as coordenadas do ponto V são $(1, 1, 6)$.

6.2.

Como o plano pretendido é perpendicular à reta OR, então um possível vetor normal ao plano será $\overrightarrow{OR}$ de coordenadas $(2, 2, 2)$, pelo que o plano é definido por uma equação da forma $2x + 2y + 2z + d = 0$.

Como $P(2, 0, 0)$ pertence ao plano, então temos que:

$2 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$

Assim, uma possível equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR é:

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0$$

ou, simplificando, $x + y + z - 2 = 0$

Produto escalar e resolução gráfica

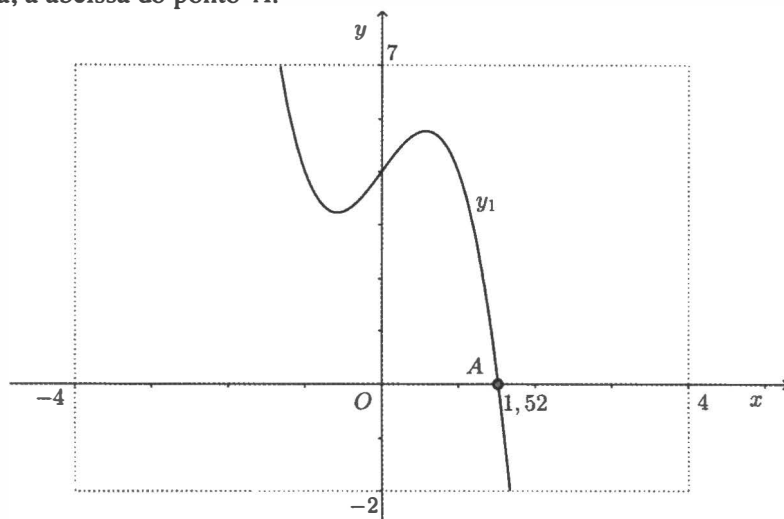
6.3.

Como o plano QRS é o plano de equação $y = 2$, as coordenadas dos pontos deste plano, em particular o ponto A, são $A(x, 2, a)$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que, a cota do ponto A é o cubo da abcissa ($a = x^3$), pelo que as coordenadas do ponto A são $\left(x, 2, x^3\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Como O é a origem do referencial, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$, coincidem com as do ponto A, ou seja, $\overrightarrow{OA} = \left(x, 2, x^3\right)$.

Recorrendo às coordenadas dos pontos $T(0, 0, 2)$ e $Q(2, 2, 0)$, determinemos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$.

Dado que $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{TQ}$ temos que: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow \left(x, 2, x^3\right) \cdot (2, 2, -2) \Leftrightarrow 2x + 4 - 2x^3 = 0$

Tendo em conta a janela de visualização sugerida, obtemos, com recurso à calculadora gráfica, a representação gráfica da função definida por $y_1 = 2x + 4 - 2x^3$, e determinamos os zeros da função, ou seja, a abcissa do ponto A.

De onde se verifica que a abcissa do ponto A é aproximadamente $1{,}52$.

Probabilidades

Combinatória

6.4.

Como temos sete cores para colorir um poliedro de nove faces. então o número de casos possíveis é 7^9.

Tendo em conta que duas das quatro faces triangulares devem ser coloridas de branco e que duas das cinco faces quadradas devem ser coloridas de azul, sendo as restantes cinco faces coloridas com cores todas diferentes (cinco cores para cinco faces), então o número de casos favoráveis é dado por ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$.

Assim, a probabilidade pedida é: $P = \dfrac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 0{,}0002$.

FIM

GRUPO I

1.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, substituindo os valores conhecidos, podemos calcular $P(A)$:

$0{,}7 = P(A) + 0{,}4 - 0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}7 - 0{,}4 + 0{,}2 = P(A) \Leftrightarrow 0{,}5 = P(A)$

Como $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$ vem que:

$P(B \mid A) = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

Resposta correta: (**D**)

2.

Calculando o número de grupos ordenados de três rapazes, temos ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses para dispor os três rapazes juntos.

E, por cada grupo de rapazes, existem ${}^7A_7 = P_7 = 7!$ ordenações possíveis dos nove jovens, correspondendo à disposição das seis raparigas e do grupo de rapazes, considerando a ordenação relevante.

Assim, o número de maneiras de dispor os nove jovens, com os três rapazes juntos, é $3! \times 7! = 30240$.

Resposta correta: (**B**)

3.

Como o ponto P pertence ao gráfico de f, substituindo as suas coordenadas na expressão algébrica da função, temos que:

$8 = e^{a\ln 2} \Leftrightarrow 8 = \left(e^{\ln 2}\right)^a \Leftrightarrow 8 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 8 \Leftrightarrow a = \log_2 2^3 \Leftrightarrow a = 3$

Resposta correta: (**C**)

2.ª derivada

4.

Por observação da representação gráfica de f, podemos verificar o sentido das concavidades e relacioná-lo com o sinal da segunda derivada, f'' (admitindo que o ponto de inflexão tem abcissa 0).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\cap$	ponto de inflexão	$\cup$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

A única opção compatível com o sentido das concavidades da representação gráfica é a opção C.

Resposta correta: (**C**)

1.ª derivada

5.

Pela definição de derivada num ponto, temos que: $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 6$.

Assim, vem que:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right) \times \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

Resposta correta: (**A**)

N.os complexos

Conjuntos e condições

6.

Analisando cada uma das afirmações, temos:

(A) $|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2|$ é uma afirmação verdadeira porque $|z_3 - z_1|$ é a distância entre os vértices correspondentes aos complexos z_3 e z_1 (ou seja, a medida do comprimento do lado do quadrado), tal como $|z_4 - z_2|$ representa a medida do comprimento de outro lado do quadrado.

Como as medidas dos comprimentos dos lados do quadrado são iguais, a afirmação é verdadeira.

(B) $z_1 + z_4 = 2\text{Re}(z_1)$ é uma afirmação verdadeira porque como o centro do quadrado está centrado na origem e os lados são paralelos aos eixos, os vértices do quadrado estão sobre as bissetrizes dos quadrantes, ou seja, $z_1 = a + ai$ e $z_4 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

Assim, vem que: $z_1 + z_4 = a + ai + a - ai = 2a = 2\text{Re}(z_1)$.

(C) $\frac{z_4}{i} = z_1$ é uma afirmação falsa porque $\frac{z_4}{i} = z_1 \Leftrightarrow z_4 = z_1 \times i$ e $z_1 = a + ai$ e $z_4 = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

Dado que, $z_1 \times i = (a + ai) \times i = ai + ai^2 = ai + a \times (-1) = ai - a = a - ai = z_2$, ou seja, multiplicar por i corresponde geometricamente a fazer uma rotação de $\frac{\pi}{2} rad$, no sentido positivo. Portanto, fazendo uma rotação deste tipo da imagem geométrica de z_1, obtemos a imagem geométrica de z_2 e não a imagem geométrica de z_4.

(D) $-\overline{z_1} = z_2$ é uma afirmação verdadeira porque $z_1 = a + ai$ e $z_2 = -a + ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

Logo, $-\overline{z_1} = -(\overline{a + ai}) = -(a - ai) = -a + ai = z_2$.

Resposta correta: (**C**)

Geometria

Produto escalar

7.

Como os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12, temos que: $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{12}{6} = 2$.

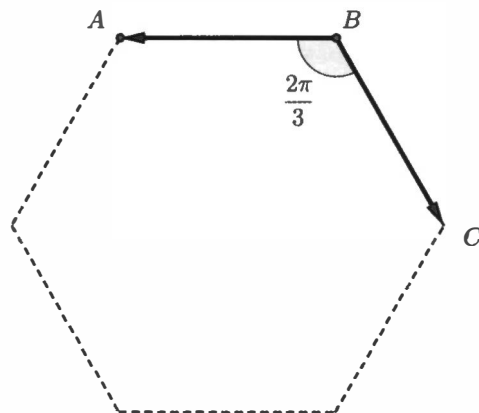
Os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, e assim cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude de cada ângulo interno de um triângulo equilátero, ou seja, $2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, vem que:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times 2 \times 2 = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$$

Resposta correta: (**B**)

Sucessões

Progressão geométrica

8.

Como (a_n) é uma progressão geométrica, designando por r a razão, temos que o termo de ordem n é $a_n = a_1 \times r^{n-1}$.

Assim, temos que:

- $a_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^{3-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4 \times r^2}$

- $a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^{6-1} = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^5 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5}$

Desta forma, podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{1}{4 \times r^2} = \frac{2}{r^5} \Leftrightarrow \frac{r^5}{r^2} = 2 \times 4 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$$

E o valor do primeiro termo:

$$a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5} \underset{(r=2)}{\Leftrightarrow} a_1 = \frac{2}{2^5} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2^4}$$

Assim, calculando o vigésimo termo, vem:

$$a_{20} = a_1 \times r^{20-1} = \frac{1}{2^4} \times 2^{19} = \frac{2^{19}}{2^4} = 2^{15} = 32768$$

Resposta correta: (**C**)

GRUPO II

1.

Escrevendo $1 + i$ na forma trigonométrica, temos que $1 + i = \rho cis\theta$, onde:

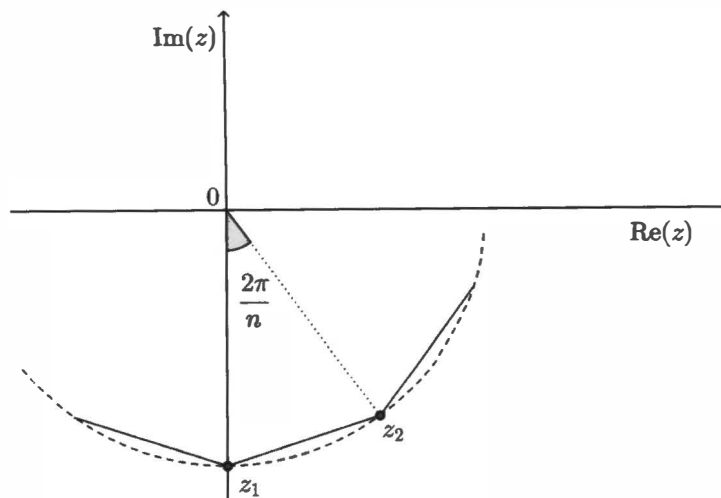
- $\rho = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;
- $\text{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$, como o afixo de $1 + i$ pertence ao 1.ºQ. , θ pertence ao 1.ºQ.. Logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$ (argumento positivo mínimo).

E assim, $1 + i = \sqrt{2}\, cis\frac{\pi}{4}$. Recorrendo à formula de Moivre, temos:

$$z_1 = (1 + i)^6 = \left(\sqrt{2}\, cis\frac{\pi}{4}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 cis\left(\frac{\pi}{4} \times 6\right) = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2 cis\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 8\, cis\frac{3\pi}{2}$$

Como $8i = 8\, cis\frac{\pi}{2}$, temos:

$$z_2 = \frac{8i}{cis\left(-\frac{6\pi}{5}\right)} = \frac{8\, cis\frac{\pi}{2}}{cis\left(-\frac{6\pi}{5}\right)} = 8\, cis\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right) = 8\, cis\left(\frac{5\pi}{10} + \frac{12\pi}{10}\right) = 8\, cis\frac{17\pi}{10}$$

Como um polígono regular de n lados pode ser dividido em n triângulos isósceles em que a soma das amplitudes dos ângulos ao centro é 2π, então cada um destes ângulos tem amplitude $\frac{2\pi}{n}$. Ou seja, $\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{2\pi}{n}$.

Assim, temos que:

$$\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{17\pi}{10} - \frac{15\pi}{10} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{10} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 10$$

Geometria

2.

2.1.

Equações de retas e planos

Como a reta OP é perpendicular ao plano β, qualquer vetor com a direção da reta (e em particular $\overrightarrow{OP}$) e o vetor normal $\vec{u}$ do plano β são colineares.

Temos que $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\overrightarrow{OP} = P - O = (-2, 1, 3a) - (0, 0, 0) = (-2, 1, 3a)$. Como os vetores são colineares, temos que $\overrightarrow{OP} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

$$(-2, 1, 3a) = \lambda(2, -1, 1) \Leftrightarrow -2 = 2\lambda \wedge 1 = -\lambda \wedge 3a = \lambda$$

$$\Leftrightarrow -1 = \lambda \wedge -1 = \lambda \wedge a = -\frac{1}{3}$$

Produto escalar

2.2.

Como o ponto B pertence ao eixo Ox, B tem ordenada e cota nulas, pelo que podemos determinar a sua abcissa, recorrendo à equação do plano β:

$$2x - y + z - 4 = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow 2x - 0 + 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

E assim temos as coordenadas do ponto B, $B(2, 0, 0)$, e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, 0) - (1, 2, 3) = (1, -2, -3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

Como o ponto C é o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz, então tem a mesma ordenada e cota de B, mas abcissa simétrica em relação à abcissa de B. Ou seja, as coordenadas do ponto C são $(-2, 0, 0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$. A sua norma será:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 0, 0) - (1, 2, 3) = (-3, -2, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar, vem que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-3) + (-2) \times (-2) + 3 \times (-3) = 10.$$

Logo, $\cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{10}{\sqrt{14} \times \sqrt{22}} = \dfrac{10}{\sqrt{308}}$, pelo que a amplitude do ângulo BAC, em graus, arredondado às unidades, é: $B\hat{A}C \approx 55^\circ$.

2.3.

A reta OP é perpendicular ao plano β e contém o centro da superfície esférica, pelo que a intersecção da reta OP com o plano β é o ponto de tangência.

Tendo em conta os elementos do item anterior para determinar as equações cartesianas da reta OP, considerando o ponto da reta $O(0, 0, 0)$ e o vetor diretor $\overrightarrow{OP} = \left(-2, 1, 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = (-2, 1, -1)$, temos as equações:

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-1} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = y = -z \, .$$

Determinemos as coordenadas do ponto de intersecção da reta OP com o plano β:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ -\frac{x}{2} = y \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2y) - y + (-y) - 4 = 0 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y - y - y - 4 = 0 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6y = 4 \\ x = -2y \\ -y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\ z = -\left(-\frac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{4}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, o ponto de tangência da superfície esférica com o plano β é o ponto $Q\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e a medida do raio é:

$$\overline{OQ} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}}$$

Assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = \left(\sqrt{\frac{24}{9}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{24}{9}$$

3.

3.1.

Usando a definição de probabilidade segundo Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

Para calcular o número de casos possíveis, basta considerar o número de arranjos completos (porque pode haver repetição) de 9 elementos (bolas) para 3 posições (extrações), ou seja, ${}^{9}A'_{3} = 9^{3} = 729$ casos possíveis.

O número de casos favoráveis pode ser calculado observando que a única combinação de números que gera um produto igual a dois será a extração de uma única bola com o número 2 e as restantes duas extrações da bola com o número 1. Como no cálculo do número de casos possíveis consideramos a ordem relevante, então neste caso tal facto também deve ser considerado, pelo que temos que escolher a posição da extração da bola com o número 2. Isto é, ${}^{3}C_{2} = 3$ casos favoráveis.

Assim, a probabilidade é $P = \frac{{}^{3}C_{2}}{9^{3}} = \frac{1}{243}$.

Distribuição binomial

3.2.

Como a variável X segue uma distribuição binomial, temos que a probabilidade de sucesso é a probabilidade de ocorrência do acontecimento que se pretende estudar, ou seja, a probabilidade de que a soma das duas bolas retiradas seja 7, em cada uma das repetições independentes da experiência aleatória.

Como existem 9 bolas no saco, existem ${}^{9}C_2$ pares de bolas que se podem retirar simultaneamente, ou seja, o número de casos possíveis em cada realização da experiência.

O número de casos favoráveis a que a soma das bolas saídas seja 7 é 3 (correspondentes às somas $1+6$, $2+5$ e $3+4$).

Assim, de acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de sucesso é $P = \frac{3}{{}^{9}C_2} = \frac{1}{12}$.

A ocorrência de n sucessos implica a ocorrência de $10-n$ insucessos, pelo que $\frac{11}{12}$ é a probabilidade do insucesso, ou seja, a probabilidade de que não ocorra a soma 7 em cada uma das realizações da experiência aleatória.

A expressão ${}^{10}C_n$ representa o número de maneiras de escolher as posições dos n sucessos, na sequência das 10 provas.

4.

Funções

Exponenciais

4.1.

Calculando as imagens dos objetos 20 e 10, temos:

$$N(20) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 20}} = \frac{200}{1+50e^{-5}}$$

$$N(10) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 10}} = \frac{200}{1+50e^{-2,5}}$$

Assim, calculando a taxa média de variação da função N no intervalo $[10\ ,\ 20]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$t.v.m._{[10\,,\,20]} = \frac{N(20)-N(10)}{20-10} = \frac{\frac{200}{1+50e^{-5}} - \frac{200}{1+50e^{-2,5}}}{10} \approx 10,742 \approx 11$$

No contexto da situação descrita, a taxa média de variação significa que entre os anos 1900 e 2000 o número de habitantes da região do globo em causa cresceu, em média, aproximadamente 11 milhões em cada década.

Exponenciais e logaritmos

4.2.

Resolvendo em ordem a t, temos:

$$N = \frac{200}{1 + 50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow 1 + 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200 - N}{N} \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \frac{200 - N}{50N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,25t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{50N}{200 - N}\right)^{4}$$

5.

Assíntotas

5.1.

Como o domínio da função é $\mathbb{R}_0^+$, a eventual existência de uma assíntota horizontal será quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{1-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \times \frac{e^1}{e^x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(e \times \frac{x^2}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e \times \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x}\right) = e \times \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}\right)^{-1} = e \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\textit{limite notável}}} =$$

$$= e \times \frac{1}{+\infty} = e \times 0 = 0$$

Logo, como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

1.ª derivada

5.2.

Comecemos por determinar a expressão algébrica da derivada da função f :

$$f'(x) = \left(x^2 e^{1-x}\right)' = \left(x^2\right)' \times e^{1-x} + x^2 \times \left(e^{1-x}\right)' =$$
$$= 2x \times e^{1-x} - x^2 \times e^{1-x} = xe^{1-x}(2-x)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\mathbb{R}_0^+$), vem que:

$$xe^{1-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} = 0 \vee 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{1-x} = 0 \vee x = 2$$

Como $e^{1-x} = 0$ é impossível, podemos concluir que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função f , vem:

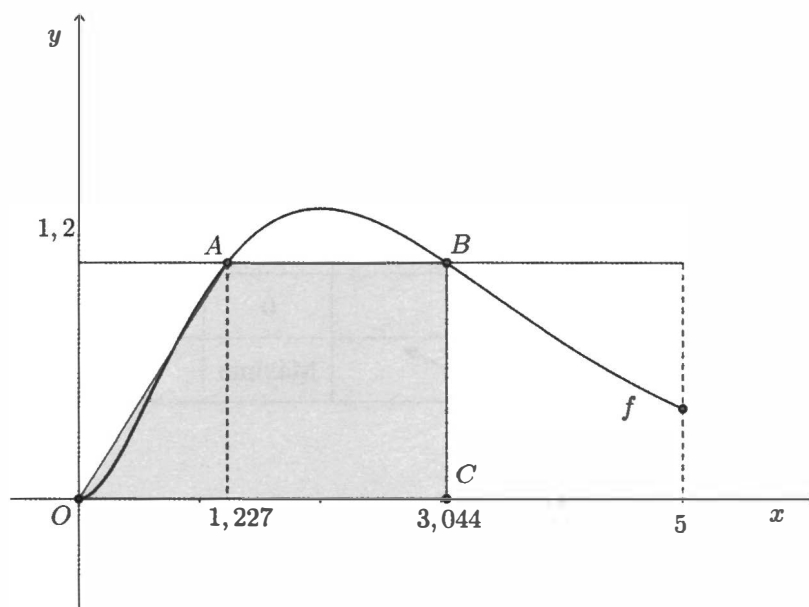
x	0	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	mínimo	↗	Máximo	↘

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $[0\ ,\ 2]$;
- é decrescente no intervalo $[2\ ,\ +\infty[$;
- tem um mínimo para $x = 0$
- tem um máximo para $x = 2$

Resolução gráfica

5.3.

Visualizando na calculadora gráfica a representação gráfica da função f e a reta horizontal cuja expressão algébrica é dada por $y = 1{,}2$, numa janela compatível com o intervalo definido $\left(x \in [\,0\,,\,5\,]\right)$, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de intersecção de dois gráficos, obtemos valores aproximados (às milésimas) para as coordenadas dos pontos A e B: $A(1{,}227\,;\,1{,}2)$ e $B(3{,}044\,;\,1{,}2)$.

Assim, podemos também assumir o valor aproximado de 3,044 para abcissa do ponto C e representar o quadrilátero $[\,OABC\,]$, constatando que é um trapézio retângulo.

Desta forma, temos que:

$\overline{OC} \approx 3{,}044 - 0 \approx 3{,}044$

$\overline{AB} \approx 3{,}044 - 1{,}227 \approx 1{,}817$

$\overline{BC} \approx 1{,}2 - 0 \approx 1{,}2$

A área do trapézio $[\,OABC\,]$, arredondada às centésimas, é:

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{BC} = \frac{3{,}044 + 1{,}817}{2} \times 1{,}2 \approx 2{,}92$$

6.

Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$, o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$. Assim, temos que:

$$f'(x) = (a\operatorname{sen}x)' = (a)' \times (\operatorname{sen}x) + a \times (\operatorname{sen}x)' = a\cos x$$

Pelo que:

$$m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{a}{2}$$

Como o declive de uma reta é a tangente da inclinação, temos também que:

$$m_r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E assim, igualando as duas expressões para o declive da reta r, podemos calcular o valor de a:

$$-\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

FIM

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

Área de um polígono regular: *Semiperímetro × Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

Área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r – raio da base; g – geratriz)*

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r – raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base × Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base × Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r – raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

AGRUPAMENTO DOS ITENS POR TEMAS

Para cada tema é identificado o conjunto das páginas em que existem enunciados de itens desse tema.

	Itens de seleção (escolha múltipla)	**Itens de construção** (questões de desenvolvimento)
Probabilidades – noções gerais	11; 21; 29; 89	16; 102; 134;145;179
Probabilidade condicionada	37; 57; 67; 129; 167; 175	15; 25; 34; 34; 42; 52; 73; 80; 93; 102; 113; 124;135; 153;162
Axiomática	11; 37; 57; 67; 77; 119; 129; 141; 159; 175	25; 43; 62; 87; 94; 103; 113; 154; 171
Combinatória	11; 21; 29; 37; 47; 77; 77; 83; 89, 99; 109; 120; 129; 141; 149; 159; 175	15; 33; 53; 63; 63; 72; 80; 86; 93; 114; 134; 145; 153; 162; 172; 179
Triângulo de Pascal e Binómio de Newton	21; 68; 83; 109; 142; 149	
Distribuições de probabilidades	11; 30; 47; 83; 89; 99; 167	24; 73; 80; 114; 125; 134; 145
Distribuição binomial	57	42; 73; 86; 125; 179
Distribuição normal	48; 99; 119	86; 153
Exponenciais	100	163;171
Exponenciais e logaritmos	175	35; 53; 53; 81; 179
Logaritmos	13; 30; 91; 109; 122; 159; 167	16; 16; 63; 73; 73
Limite segundo Heine	22; 68; 84; 100; 130; 142; 149; 159	
Limites	22; 30; 39	64; 87; 126
Teorema de Bolzano	38; 77; 110; 130	26; 54; 63; 88; 94; 106; 127; 146; 156; 164; 170
Continuidade	49; 78; 142; 168	17; 35; 45; 63; 74; 94; 115; 137; 155; 171
Assíntotas	13; 38; 58; 81; 85; 91; 100; 121; 151	17; 26; 35; 43; 54; 74; 81; 87; 103; 104; 115; 126; 137; 146; 147; 155; 156; 163; 171; 180
1.ª derivada	22; 31; 39; 69; 70; 78; 84; 100; 110; 111; 116; 120; 131; 177; 180	18; 26; 26; 36; 43; 43; 44; 54; 63; 81; 82; 94; 94; 95; 103; 104; 106; 116; 126; 137; 146; 147; 155; 156; 163; 164; 171; 180
2.ª derivada	12; 48; 58; 78; 90; 110; 120; 143; 151; 168; 176	44; 45; 54; 64; 87; 95; 115; 137; 147; 163; 171

	Itens de seleção (escolha múltipla)	Itens de construção (questões de desenvolvimento)
Funções trigonométricas	49; 59; 132; 150; 160; 168	18; 27; 27; 36; 44; 54; 74; 82; 88; 94; 106; 116; 127; 146; 170; 180
Funções – Resolução gráfica		17; 26; 35; 43; 54; 64; 75; 81; 87; 96; 103; 115; 125; 138; 147; 155; 164; 172; 180
N.os complexos – operações	14; 32; 40; 51; 59; 71; 79; 85; 91; 101; 101; 112; 123; 152	42; 52; 52; 72; 86; 102; 113; 124; 134; 145; 153;162
N.os complexos – equações	59	42; 72; 80; 145
N.os complexos – conjuntos e condições	14; 32; 41; 50; 79; 92; 112; 122; 144; 160; 177	24; 61; 86; 93
N.os complexos – potências e raízes	23; 23; 60; 70; 85; 133	15; 24; 33; 33; 61; 80; 93; 102; 113; 124; 170; 178
N.os complexos – demonstrações		15; 52; 72; 80; 93; 113; 134
Equações de retas, planos e lugares geométricos	131; 144; 152; 161; 169	154; 164; 164; 172; 172; 178;178
Produto escalar	177	136; 146; 164; 172; 178
Sucessões	161; 169; 177	